

**Міністерство освіти і науки України**  
**Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка**  
**Факультет фізики, математики, економіки та інноваційних технологій**  
**Кафедра математики та економіки**

**«До захисту допускаю»**

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат педагогічних наук, доцент

\_\_\_\_\_ Тарас ВІЙЧУК «\_\_» \_\_\_\_\_ 2025 р.

**МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ПОКАЗНИКОВОЇ  
ФУНКЦІЇ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ**

**Спеціальність: 014 «Середня освіта (за предметними  
спеціальностями)»**

**Предметна спеціальність: 014.04 «Середня освіта (Математика)»**

**Додаткова предметна спеціальність: 014.09 «Середня освіта  
(Інформатика)»**

**Магістерська робота**  
**на здобуття кваліфікації «Магістр середньої освіти.**  
**Вчитель математики, вчитель інформатики»**

Автор роботи – Лазарів Юлія Степанівна \_\_\_\_\_  
(підпис)

Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук,  
доцент Комарницька Леся Іванівна \_\_\_\_\_  
(підпис)

**Дрогобич, 2025**

## Захист магістерської роботи

### Методика вивчення показникової функції у шкільному курсі математики

Оцінка за стобальною шкалою: \_\_\_\_\_

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: \_\_\_\_\_

Коротка мотивація захисту:

---

---

---

---

---

---

---

---

---

|       |             |        |                         |
|-------|-------------|--------|-------------------------|
| _____ | Голова ЕК   | _____  | _____                   |
| дата  |             | підпис | власне ім'я та прізвище |
|       | Секретар ЕК | _____  | _____                   |
|       |             | підпис | власне ім'я та прізвище |

**Анотація. Лазарів Юлія. Методика вивчення показникової функції у шкільному курсі математики**

Магістерська робота присвячена методиці вивчення показникової функції у шкільному курсі математики. У першому розділі розглянуто теоретичні аспекти вивчення показникової функції. Другий розділ присвячено методичним підходам до вивчення показникової функції та методико-педагогічним проблемам при її вивченні. Розглянуто труднощі засвоєння теми та запропоновано ефективні підходи до їх вирішення. Робота містить рекомендації для вчителів і може бути корисною у навчальному процесі.

**Abstract. Lazariv Yulia. Methodology of studying the exponential function in the school mathematics course**

The master's thesis is devoted to the methodology of studying the exponential function in the school mathematics course. The first section considers the theoretical aspects of studying the exponential function. The second section is devoted to methodological approaches to studying the exponential function and methodological and pedagogical problems in studying it. The difficulties of mastering the topic are considered and effective approaches to solving them are proposed. The work contains recommendations for teachers and can be useful in the educational process.

## Зміст

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВСТУП .....                                                                              | 5  |
| РОЗДІЛ I. Теоретичні аспекти вивчення показникової функції .....                         | 7  |
| 1.1 Степінь з довільним дійсним показником .....                                         | 7  |
| 1.2 Означення показникової функції .....                                                 | 9  |
| 1.3 Властивості показникової функції та її графічна інтерпретація .....                  | 10 |
| 1.4 Показникові рівняння. Системи показникових рівнянь .....                             | 13 |
| 1.5 Показникові нерівності .....                                                         | 21 |
| РОЗДІЛ II. Методичні підходи до вивчення показникової функції .....                      | 24 |
| 2.1 Місце показникової функції в шкільному курсі алгебри .....                           | 24 |
| 2.2 Огляд підручників з алгебри щодо висвітлення теми «Показникова функція» .....        | 29 |
| 2.3 Методико-педагогічні проблеми при вивченні показникової функції ...                  | 31 |
| 2.4 Застосування показникової функції в інших галузях знань .....                        | 33 |
| 2.5 Розробка уроку з вивчення властивостей показникової функції .....                    | 36 |
| 2.6 Розробка контрольної роботи .....                                                    | 38 |
| 2.7 Експериментальна перевірка розробленої методики .....                                | 40 |
| РОЗДІЛ III. Завдання з теми «Показникова функція», які пропонувались на ЗНО та НМТ ..... | 43 |
| ВИСНОВКИ .....                                                                           | 46 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....                                                         | 48 |

## ВСТУП

Математична освіта є одним із ключових напрямів загальної середньої освіти, оскільки формує логічне мислення, вміння аналізувати, узагальнювати та застосовувати математичні знання у практичній діяльності. Важливе місце в курсі алгебри займає вивчення показникової функції, яка широко використовується в різних сферах науки і техніки, таких як фізика, економіка, біологія тощо [13]. Її вивчення допомагає не лише освоїти теоретичні знання, але й зрозуміти, як математика взаємодіє з реальним світом. Це розвиває уявлення про практичну цінність математичних концепцій і їхню роль у науці та житті. Тому розробка ефективної методики вивчення показникової функції є актуальною проблемою методики навчання математики.

**Актуальність дослідження** полягає в необхідності вдосконалення методів і прийомів навчання показникової функції у шкільному курсі математики. Сучасні освітні тенденції передбачають використання інтерактивних технологій, диференційованого та компетентнісного підходів у викладанні математичних дисциплін. Однак питання оптимізації методики вивчення показникової функції потребує подальшого дослідження та розробки ефективних методичних підходів.

**Об'єкт дослідження** – процес навчання алгебри у шкільному курсі математики.

**Предмет дослідження** – методика вивчення показникової функції у шкільному курсі математики.

**Мета дослідження** – обґрунтування та розробка методичних рекомендацій щодо ефективного вивчення показникової функції, спрямованих на підвищення рівня математичної підготовки учнів.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі **завдання**:

1. Проаналізувати науково-методичну літературу з питань викладання показникової функції.
2. Дослідити особливості сприйняття учнями понять, пов'язаних із показниковою функцією.

3. Визначити основні труднощі, які виникають під час її вивчення у школі.
4. Розробити методичні рекомендації щодо використання різних підходів до вивчення цієї теми.
5. Запропонувати практичні завдання та вправи для формування стійких знань з показникової функції.
6. Перевірити ефективність запропонованої методики у педагогічному експерименті.

**Наукова новизна дослідження** полягає у розробці методичних підходів до вивчення показникової функції, що ґрунтуються на використанні сучасних освітніх технологій, зокрема інтерактивних методів навчання, застосування цифрових ресурсів та індивідуалізації навчального процесу.

У процесі виконання дослідження будуть використані такі методи:

- теоретичний аналіз і узагальнення науково-методичної літератури;
- педагогічне спостереження;
- аналіз навчальних програм і підручників;
- анкетування та опитування учнів і вчителів;
- експериментальне навчання;
- статистична обробка отриманих результатів.

Таким чином, проведене дослідження сприятиме вдосконаленню методики викладання показникової функції у шкільному курсі математики, що, у свою чергу, забезпечить підвищення рівня засвоєння учнями даного матеріалу та їх загальної математичної компетентності.

Результати дослідження доповідалися на міжнародній науково-практичній студентсько-викладацькій конференції «Актуальні проблеми сучасної науки» у Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка [5].

## РОЗДІЛ I. Теоретичні аспекти вивчення показникової функції

Показникова функція має багатовікову історію, що бере свій початок ще в античній математиці. Перші згадки про показникові залежності з'явилися в працях стародавніх математиків, таких як Архімед та Ератосфен. Систематичне вивчення показникових функцій почалося у XVII столітті завдяки роботам Джона Непера. У 1614 році шотландський математик Джон Непер (John Napier) опублікував роботу, де вперше представив ідею логарифмів. Логарифми були створені як інструмент для спрощення обчислень, і їхній зв'язок із показниковою функцією був зрозумілий пізніше.

Перші чіткі поняття про показникову функцію з'явилися у XVII столітті завдяки роботам Рене Декарта (René Descartes) та Ісаака Барроу (Isaac Barrow). Декарт використав поняття степеня для опису рівнянь і перетворив ідеї геометричних прогресій у математичний апарат. У XVIII столітті великий внесок у розвиток показникової функції зробив Леонард Ейлер (Leonhard Euler). Ейлер ввів поняття експоненти  $e^x$ , де  $e$  – основа натурального логарифма (приблизно дорівнює 2,718). Він показав, що експонента є універсальною функцією для будь-якої основи  $a$  через зв'язок:  $a^x = e^{x \ln a}$ . Також Ейлер відкрив важливу формулу:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x ,$$

яка пов'язала показникову функцію з тригонометрією і комплексними числами.

У XIX столітті вивчення показникових функцій продовжили Карл Фрідріх Гаусс, Августин-Луї Коші та інші математики, розробляючи її властивості та застосування у фізиці, статистиці та інших галузях.

### 1.1 Степінь з довільним дійсним показником

Поняття степеня є одним з фундаментальних у шкільному курсі алгебри. Воно є необхідною передумовою для вивчення багатьох тем: степеневих виразів, многочленів, раціональних та ірраціональних виразів, а також показникових і логарифмічних функцій, що широко використовуються у фізиці,

хімії, економіці. Школярі вперше знайомляться зі степенем у молодших класах у вигляді піднесення до квадрату або кубу. Пізніше учні знайомляться з натуральним показником степеня, поступово розширюючи це поняття на цілий, раціональний і, зрештою, дійсний показник.

Так, для будь-якого дійсного числа  $a$  і натурального числа  $n$  степінь  $a^n$  означає добуток  $n$  однакових множників:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для розширення поняття вводиться степінь з нульовим показником:

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0,$$

а також степінь з від'ємним цілим показником:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0.$$

Далі учні вивчають степінь з раціональним показником:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad a > 0, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Логічним продовженням теми степеня з раціональним показником є поняття степеня з довільним дійсним показником, яке формує підґрунтя для вивчення показникової й логарифмічної функцій та відповідних рівнянь і нерівностей. Тут важливо наголосити учням, що показник степеня може мати не лише ціле чи раціональне, а й ірраціональне значення, наприклад:  $a^{\sqrt{2}}, a^\pi, a^e$ , де  $\sqrt{2}, \pi, e$  – ірраціональні числа.

Ірраціональні показники не можна точно представити у вигляді дробу, але степінь із таким показником має цілком визначене значення (його можна обчислити наближено за допомогою калькулятора або комп'ютера).

Приклади:

$$\checkmark \quad 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8;$$

$$\checkmark \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8};$$

$$\checkmark \quad 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2;$$

$$✓ 8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4;$$

$$✓ 2^{\pi} \approx 8,825;$$

$$✓ 10^{\sqrt{3}} \approx 53;$$

$$✓ e^{\sqrt{2}} \approx 4,113;$$

$$✓ 10^{\log_2 3} \approx 38.$$

Властивості степеня з дійсним показником [2, 3]:

$$✓ \alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y},$$

$$✓ \alpha^x : \alpha^y = \alpha^{x-y},$$

$$✓ (\alpha^x)^y = \alpha^{x \cdot y},$$

$$✓ (\alpha b)^x = \alpha^x b^x,$$

$$✓ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

## 1.2 Означення показникової функції

Функція  $y = \alpha^x$  називається показниковою, якщо:

- основа  $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ ;
- $x \in \mathbb{R}$ .

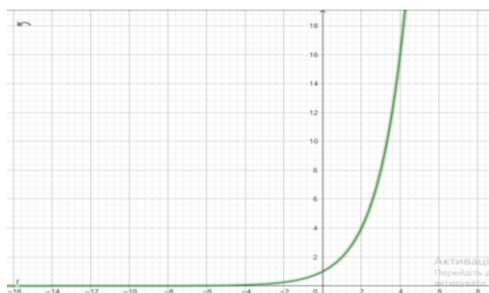
Графік функції залежить від значення основи  $\alpha$ .

❖ Якщо  $\alpha > 1$ , функція є зростаючою (наприклад,  $y = 2^x$ ).

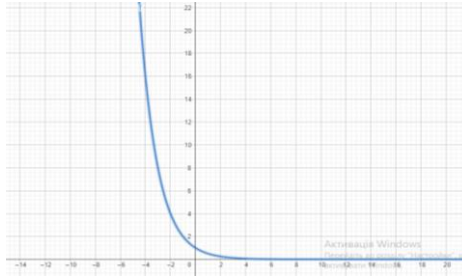
❖ Якщо  $0 < \alpha < 1$ , функція є спадною (наприклад,  $y = 0,5^x$ ).

*Приклади:*

- $y = 2^x$ : зростаюча, область визначення  $x \in \mathbb{R}$ ,  
область значень  $y > 0$ .



- $y = 0,5^x$ : спадна, область визначення  $x \in \mathbb{R}$ , область значень  $y > 0$ .



*Особливості:*

Графік функції ніколи не досягає осі  $x$  (асимптота).

У точці  $x = 0$  функція набуває значення 1 ( $\alpha^0 = 1$ ).

### 1.3 Властивості показникової функції та її графічна інтерпретація

Показникова функція  $y = \alpha^x$ , де  $\alpha > 0$  і  $\alpha \neq 1$ , є однією з фундаментальних функцій у математиці, фізиці, біології та інших науках. Її основні властивості є результатом математичного аналізу та спостережень.

#### 1. Область визначення

Показникова функція визначена для всіх дійсних значень аргументу  $x$ :

$$D(y) = \mathbb{R}.$$

Це означає, що ми можемо підставити будь-яке дійсне число  $x$  у функцію  $\alpha^x$  і отримати результат.

#### 2. Множина значень

Значення показникової функції завжди додатні, незалежно від  $x$ :

$$E(y) = (0; +\infty).$$

Навіть при  $x \rightarrow -\infty$  значення функції залишається додатним, але наближається до 0. Функція ніколи не набуває нульового або від'ємного значення.

#### 3. Перетин із координатними осями

Графік показникової функції перетинає вісь  $Oy$  у точці  $(0, 1)$ , оскільки  $\alpha^0 = 1$  для будь-якого  $\alpha > 0$ .

Функція не перетинає вісь  $Ox$ , адже значення функції завжди додатні.

#### **4. Монотонність і поведінка графіка**

Монотонність залежить від основи  $\alpha$ :

- Якщо  $\alpha > 1$ , то функція є зростаючою. Це означає, що зі збільшенням  $x$  значення  $y$  також збільшується.
- Якщо  $0 < \alpha < 1$ , то функція є спадною. Це означає, що зі збільшенням  $x$  значення  $y$  зменшується.

Поведінка функції:

- При  $x \rightarrow +\infty : y \rightarrow +\infty$  (для  $\alpha > 1$ ).
- При  $x \rightarrow +\infty : y \rightarrow 0^+$  (для  $0 < \alpha < 1$ ).
- При  $x \rightarrow -\infty : y \rightarrow 0^+$  (для  $\alpha > 1$ ).
- При  $x \rightarrow -\infty : y \rightarrow +\infty$  (для  $0 < \alpha < 1$ ).

#### **5. Неперервність і диференційовність**

Показникова функція є неперервною і гладкою (має похідну будь-якого порядку):

- На всій області визначення функція не має розривів.
- Вона є диференційовною, а її похідна має вигляд:  $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$ .

#### **6. Асимптоти**

Графік функції має горизонтальну асимптоту – вісь  $Ox$ . Це означає, що графік функції ніколи не торкається і не перетинає вісь  $Ox$ , але наближається до неї.

#### **7. Експоненційний характер зростання або спадання**

Показникова функція характеризується експоненційним характером змін:

- Для  $\alpha > 1$  значення швидко зростає при  $x > 0$ .
- Для  $0 < \alpha < 1$  значення швидко зменшується при  $x > 0$ .

Цей характер змін дозволяє використовувати показникову функцію для моделювання процесів, які розвиваються швидкими темпами (зростання населення, розпад радіоактивних матеріалів тощо).

### 8. Зміна основи функції

Показникову функцію з будь-якою основою можна виразити через експоненту  $e^x$  :

$$\alpha^x = e^{x \ln \alpha},$$

де  $e \approx 2.718$  – основа натурального логарифма.

### 9. Поведінка на границях

Для  $\alpha > 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0.$$

Для  $0 < \alpha < 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty.$$

### 10. Геометрична інтерпретація

Графік функції  $y = \alpha^x$  :

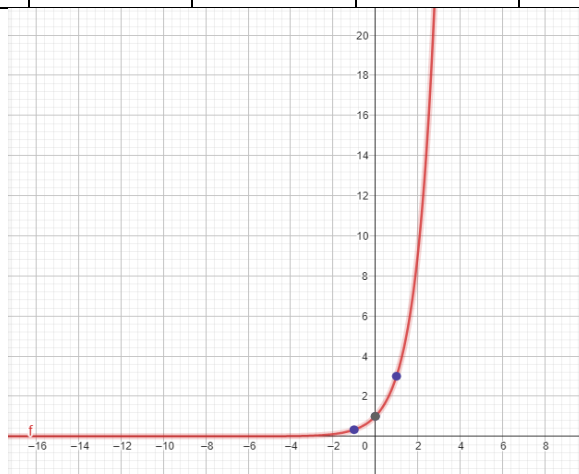
- Зростає (або спадає) експоненційно, залежно від основи  $\alpha$  .
- Проходить через точку  $(0;1)$ .
- Лежить вище осі  $Ox$  на всьому проміжку  $x \in \mathbb{R}$ .

*Приклади:*

1. Побудувати графіки функцій:

а)  $y = 3^x$ . Складемо таблицю значень.

|     |               |               |   |   |   |    |
|-----|---------------|---------------|---|---|---|----|
| $x$ | -2            | -1            | 0 | 1 | 2 | 3  |
| $y$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 3 | 9 | 27 |

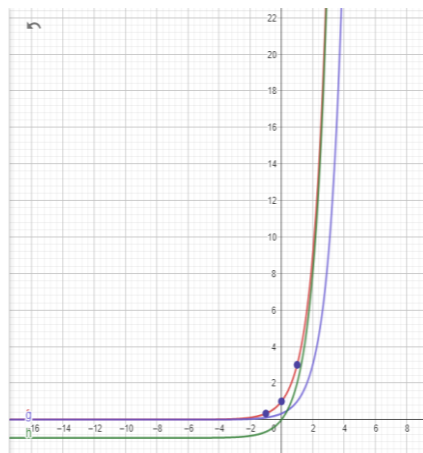


б)  $y = 3^{x-1}$ .

Якщо до аргумента додається або віднімається число  $a$ , то графік функції паралельно переноситься відповідно вліво або вправо на число  $a$ . У нашому випадку графік функції  $y = 3^x$  паралельно переноситься вправо на 1 (кожна точка переноситься на 1 вправо).



в)  $y = 3^x - 1$ . Тут перенесення відбувається на 1 вниз.



#### 1.4 Показникові рівняння. Системи показникових рівнянь

Розглянуті властивості показникової функції лежать в основі розв'язування широкого класу задач, зокрема показникових рівнянь, що є важливою складовою шкільного курсу алгебри. Знання основних властивостей цієї функції є необхідною передумовою для успішного розв'язування показникових рівнянь, які часто зустрічаються як у шкільних підручниках, так і у завданнях зовнішнього незалежного оцінювання та НМТ [6, 14]. Вивчення

цієї теми забезпечує учням фундамент для опанування методів розв'язування показникових рівнянь і сприяє розвитку алгебраїчного мислення.

**Показниковим** називається рівняння, в якому змінна входить до показника степеня.

У шкільному курсі алгебри учні знайомляться з основними видами показникових рівнянь, методами їх зведення до спільної основи та використанням логарифмів для знаходження розв'язків.

Найпростіше показникове рівняння має вигляд

$$a^x = b \quad (a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0).$$

Найпоширенішим способом розв'язування показникових рівнянь є зведення обидвох частин рівняння до однакової основи, що дозволяє порівняти показники. Якщо це зробити неможливо, застосовують логарифми. Розв'язування показникових рівнянь формує у школярів навички логічних перетворень, що знаходить відображення у вправах підручників сучасних авторів, зокрема Бевза Г. П., Істера О. С. та Мерзляка А. Г. [1-3, 7-9].

Розглянемо приклади на використання різних способів розв'язання показникових рівнянь.

### **1. Спосіб зведення до спільної основи**

1)  $2^x = 8$ .

$$2^x = 2^3.$$

Якщо основи степенів рівні, то показники рівні. Тому  $x = 3$ .

2)  $16^x = \frac{1}{8} \Rightarrow (2^4)^x = 2^{-3} \Rightarrow 2^{4x} = 2^{-3} \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$ .

3)  $15^{x^2-5x+6} = 1$ .

Оскільки  $1 = 15^0$ , то  $15^{x^2-5x+6} = 15^0$ ,  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

За теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 \cdot x_2 = 6. \end{cases}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

3)  $2^{x-2} = -2$

Оскільки  $2^{x-2} > 0$  при всіх  $x$ , то рівняння коренів немає.

$$4) 2^x = 5 \Rightarrow x = \log_2 5.$$

$$5) 2^x \cdot 5^x = 0,1(10^{x-1})^3.$$

$$10^x = 10^{-1} \cdot 10^{3x-3};$$

$$10^x = 10^{3x-4};$$

$$x = 3x - 4;$$

$$x = 2.$$

## **2. Спосіб винесення спільного множника за дужки**

Спосіб винесення спільного множника за дужки є одним з ефективних прийомів при розв'язуванні показникових рівнянь. Його застосовують у випадках, коли показникове рівняння можна подати у вигляді суми або різниці кількох доданків з однаковим степеневим виразом як множником:

$$A_1 a^{x+k_1} + A_2 a^{x+k_2} + \dots + A_n a^{x+k_n} = 0.$$

Використання цього способу дозволяє звести рівняння до добутку множників і далі застосувати нуль-подібний принцип: добуток дорівнює нулю, якщо принаймні один з множників дорівнює нулю. Такий підхід спрощує розв'язування складніших показникових рівнянь та розвиває в учнів уміння бачити спільні множники у виразах.

$$1) 2^{x+2} - 2^x = 6.$$

$$\text{За властивістю степеня: } 2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2;$$

$$2^x(2^2 - 1) = 6;$$

$$2^x \cdot 3 = 6;$$

$$2^x = 6 : 3 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1.$$

$$2) 3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 63.$$

$$3^{x-2}(3^2 - 2) = 63;$$

$$3^{x-2} \cdot 7 = 63;$$

$$3^{x-2} = 9;$$

$$3^{x-2} = 3^2;$$

$$x - 2 = 2;$$

$$x = 4.$$

$$3) 5^{2x-1} - 5^{2x} + 2^{2x} + 2^{2x+2} = 0.$$

$$2^{2x} + 2^{2x+2} = 5^{2x} - 5^{2x-1};$$

$$2^{2x}(1 + 2^2) = 5^{2x}(1 - 5^{-1});$$

$$2^{2x} \cdot 5 = 5^{2x} \cdot \frac{4}{5};$$

Поділимо на  $5^{2x} \cdot 5$ :

$$\frac{2^{2x}}{5^{2x}} = \frac{4}{25} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1.$$

### 3. Спосіб введення нової змінної

Одним із ефективних прийомів розв'язання показникових рівнянь є введення нової змінної, що базується на заміні показникового виразу відповідним символом. Такий метод дозволяє перейти від показникового рівняння до звичайного алгебраїчного, зручного для подальшого розв'язання. У шкільному курсі алгебри найчастіше це рівняння вигляду

$$Aa^{2x} + Ba^x + C = 0,$$

що зводиться до квадратного рівняння.

$$1) 49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0.$$

$$49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0;$$

$$(7^2)^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0;$$

$$(7^x)^2 - 8 \cdot 7^x + 7 = 0.$$

Вводимо заміну:  $7^x = t$ ,  $t > 0$ , тоді

$$t^2 - 8 \cdot t + 7 = 0.$$

За теоремою Вієта:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 8; \\ t_1 \cdot t_2 = 7. \end{cases}$$

$$t_1 = 7; \quad t_2 = 1.$$

З урахуванням заміни  $7^x = t$ , отримаємо:

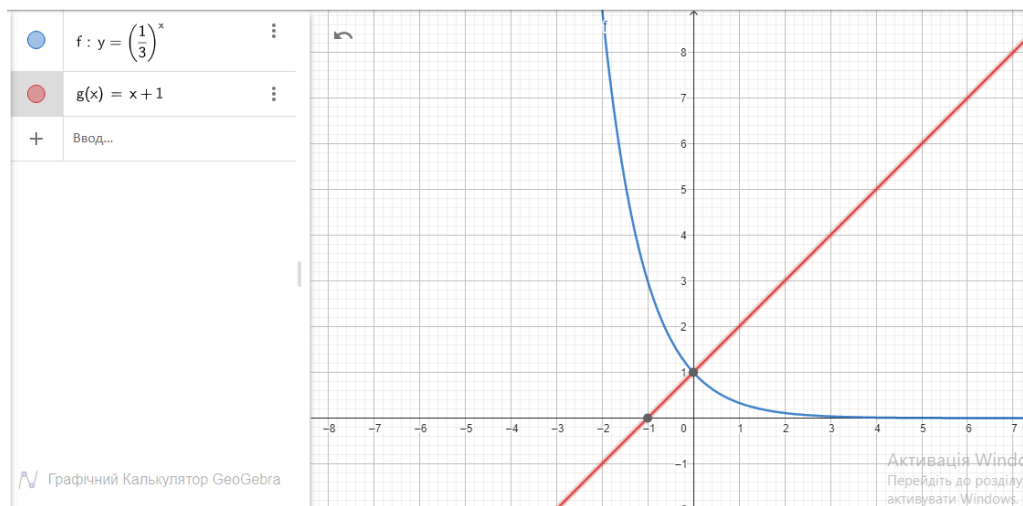
$$1) \quad t_1 = 7 \Rightarrow 7^x = 7 \Rightarrow x = 1.$$

$$2) \quad t_2 = 1 \Rightarrow 7^x = 1 \Rightarrow x = 0.$$

#### 4. Графічний спосіб

Розв'язати графічно рівняння :  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$ .

Будуємо графіки функцій  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  і  $y = x + 1$  в одній системі координат.



Графіки функцій  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  і  $y = x + 1$  перетинаються в точці, абсциса якої  $x = 0$ .

#### Системи показникових рівнянь

Наступним етапом у вивченні теми є розгляд систем показникових рівнянь і нерівностей. Ці завдання є більш складними порівняно з окремими рівняннями, оскільки потребують застосування різних методів розв'язування – введення нової змінної, логарифмування, зведення виразів до спільної основи, комбінування рівнянь та ін.

У шкільній практиці матеріал, що стосується розв'язування систем показникових рівнянь, представлений, зокрема, у підручнику «Алгебра і початки аналізу» для профільних класів авторів Істера О. С. та Єрґіної О. В. [2]. У ньому розглядаються типові приклади систем показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей, методи їхнього розв'язування, а також подано завдання різних рівнів складності для формування стійких умінь учнів. У підручниках авторів Бевз Г. П. [1] і Мерзляк А. Г. [8] такі системи подані фрагментарно – як окремі приклади або вправи підвищеної складності, без виділення у

самостійний підпункт. Наприклад, можуть бути системи, де одне рівняння – показникове, друге – лінійне або логарифмічне.

Розглянемо різні способи розв’язання систем показникових рівнянь.

### 1. Спосіб підстановки

1) Знайти найбільшу суму розв’язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2^{y-x} \cdot (x+y) = 1, \\ (x+y)^{x-y} = 2. \end{cases}$$

#### Розв’язання

З першого рівняння визначаємо  $x+y$

$$\begin{cases} x+y = \frac{1}{2^{y-x}}, \\ (x+y)^{x-y} = 2 \end{cases}$$

і підставимо у друге рівняння системи:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y = \frac{1}{2^{y-x}}, \\ (2^{x-y})^{x-y} = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x+y = \frac{1}{2^{y-x}}, \\ (x-y)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y = 2, \\ x-y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = 2^{-1}, \\ x-y = -1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1,5, \\ y = 0,5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -0,25, \\ y = 0,75. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Найбільша сума розв’язків:  $1,5 + 0,5 = 2$ .

Відповідь: 2.

2) Розв’язати систему  $\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 80, \\ x+y = (\sqrt{5})^2. \end{cases}$

#### Розв’язання

З другого рівняння визначаємо  $x$ :

$$\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 80, \\ x = 5 - y. \end{cases}$$

Підставляємо в перше рівняння:

$$\begin{cases} 5^{5-y} \cdot 2^y = 80, \\ x = 5 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5^{5-y}}{5^y} = 80, \\ x = 5 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^y = \frac{80}{5 \cdot 5^4}, \\ x = 5 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^y = \left(\frac{2}{5}\right)^4, \\ x = 5 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4, \\ x = 1. \end{cases}$$

Відповідь: (1; 4).

## 2. Спосіб заміни змінних

1) Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{x+y} = 56, \\ 3 \cdot 2^x + 3^{x+y+1} = 87. \end{cases}$$

### Розв'язання

Виконаємо заміну:  $2^x = v$ ,  $3^{x+y} = \nu$ .

$$\begin{cases} v + 2 \cdot \nu = 56, \\ 3 \cdot v + 3 \cdot \nu = 87 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v + 2 \cdot \nu = 56, \\ v + \nu = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 2, \\ \nu = 27. \end{cases}$$

Оскільки  $2^x = v$ ,  $3^{x+y} = \nu$ , то

$$\begin{cases} 2^x = 2, \\ 3^{x+y} = 27; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Відповідь: (1; 2).

2) Розв'язати систему 
$$\begin{cases} 2^{\sqrt[3]{x}} \cdot 3^{\sqrt{y}} = 12, \\ 2^{2\sqrt[3]{x}} + 3^{2\sqrt{y}} = 25. \end{cases}$$

### Розв'язання

ОДЗ:  $x \in \mathbb{R}$ ;  $y \in [0; \infty)$ .

Заміна:  $2^{\sqrt[3]{x}} = v$ ,  $3^{\sqrt{y}} = \nu$ ; ( $v > 0$ ;  $\nu > 0$ ).

$$\begin{cases} v \cdot \nu = 12, \\ v^2 + \nu^2 = 25. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на 2 і додамо рівняння:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} v \cdot \nu = 12, \\ v^2 + 2v \cdot \nu + \nu^2 = 25 + 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v \cdot \nu = 12, \\ (v + \nu)^2 = 49 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} v \cdot \nu = 12, \\ v + \nu = 7, \\ v + \nu = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} v \cdot \nu = 12, \\ v + \nu = 7, \end{cases} \\ \begin{cases} v \cdot \nu = 12, \\ v + \nu = -7. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Друга система сукупності не має розв'язків, оскільки  $v > 0, \nu > 0$ . Перша система має розв'язки

$$\begin{cases} v = 3, \\ \nu = 4 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} v = 4, \\ \nu = 3. \end{cases}$$

Тоді, враховуючи заміну  $2^{\sqrt[3]{x}} = v$ ,  $3^{\sqrt{y}} = v$  ( $v > 0$ ;  $v > 0$ ), отримаємо

$$\begin{cases} 2^{\sqrt[3]{x}} = 3, \\ 3^{\sqrt{y}} = 4 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2^{\sqrt[3]{x}} = 4, \\ 3^{\sqrt{y}} = 3. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x = (\log_2 3)^3, \\ y = (\log_3 4)^2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = 8, \\ y = 1. \end{cases}$$

Відповідь:  $((\log_2 3)^3; (\log_3 4)^2), (8; 1)$ .

### 3. Спосіб множення та ділення рівнянь системи

1) Знайти модуль різниці розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$$

Розв'язання

Перемножимо та поділимо рівняння:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 6^x \cdot 6^y = 216, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-y} = \frac{2}{3} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 6^{x+y} = 216, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases} &\Rightarrow |2-1|=1. \end{aligned}$$

Відповідь: 1.

### 4. Спосіб логарифмування

1) Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} 5^x = 4y, \\ 4^x = 5y. \end{cases}$

Розв'язання

Прологарифмуємо обидва рівняння за основою 5.

$$\begin{cases} \log_5 5^x = \log_5(4y), \\ \log_5 4^x = \log_5(5y); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \log_5 5 = \log_5 4 + \log_5 y, \\ x \log_5 4 = \log_5 5 + \log_5 y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \log_5 4 + \log_5 y, | \cdot (-1) \\ x \log_5 4 = 1 + \log_5 y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = -\log_5 4 - \log_5 y, \\ x \log_5 4 = 1 + \log_5 y. \end{cases}$$

Додамо рівняння:

$$\begin{cases} x \log_5 4 - x = 1 - \log_5 4, \\ 5^x = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = \frac{1}{20}. \end{cases}$$

Відповідь:  $(-1; \frac{1}{20})$ .

#### 4. Спосіб піднесення до певного степеня кожного з рівнянь системи

1) Знайти найменше значення добутку  $xу$ , якщо пара  $(x; y)$  є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^4 = y^2. \end{cases}$$

Розв'язання

ОДЗ:  $x > 0, y > 0, x \neq 0, y \neq 0$ .

Перше рівняння піднесемо до степеня 2, друге – до степеня  $x$ .

$$\begin{cases} x^{2y} = y^{2x}, \\ x^{4x} = y^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 4x, \\ x^4 = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ x^4 = (2x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ x^4 - 4x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ x^2(x^2 - 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = -4, \\ x = 2, \\ y = 4, \\ x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Враховуючи ОДЗ, лише пара чисел  $(2; 4)$  є розв'язком системи, тому найменше значення добутку  $xу$  дорівнює 8.

Відповідь: 8.

### 1.5 Показникові нерівності

Показникові нерівності – це нерівності, в яких невідоме входить лише в показник степеня.

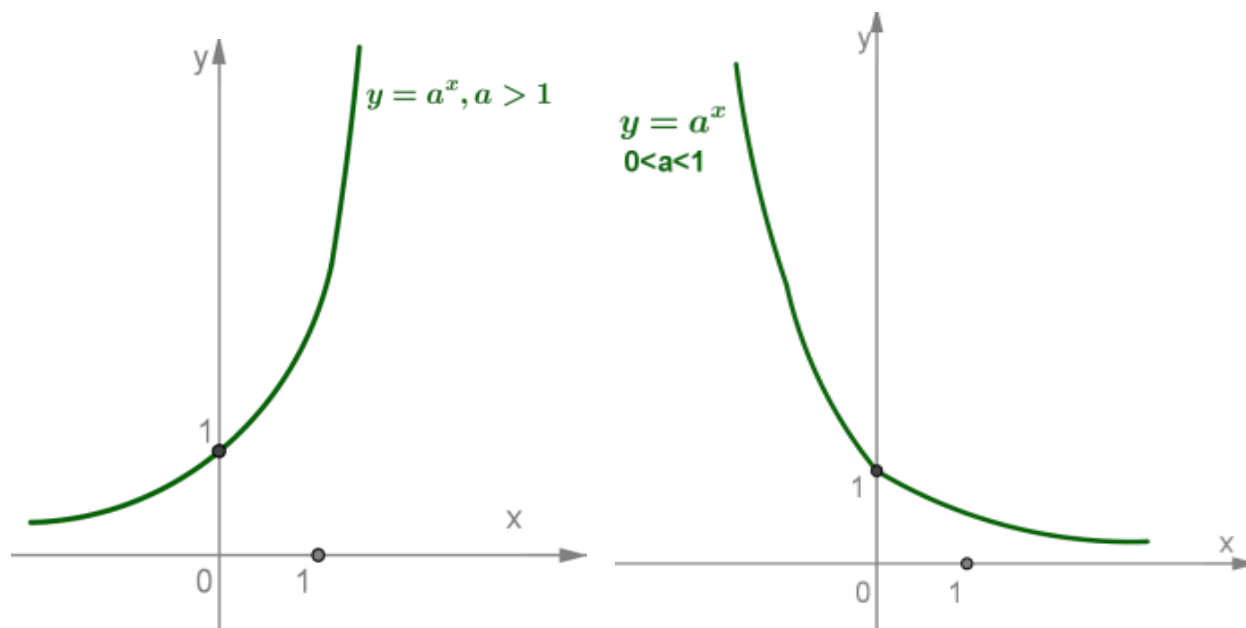
Найпростіші показникові нерівності мають вигляд:

$$a^x < b, a^x > b, a^x \leq b, a^x \geq b, a > 0, a \neq 1, b - \text{число.}$$

Нерівності розв'язуються за допомогою властивості зростання або спадання показникової функції:

- для зростаючої функції більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу;
- для спадної функції більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу.

Показникова функція  $y = a^x$  зростає при  $a > 1$  і спадає при  $0 < a < 1$ :



Для розв'язування показникових нерівностей використовують ті ж методи, що й для показникових рівнянь, а також правила розв'язування найпростіших показникових нерівностей. Розглянемо приклади.

1)  $2^{x-5} < 8$ .

$$2^{x-5} < 2^3.$$

Оскільки  $2 > 1$ , функція зростаюча, то знак нерівності не змінюється:

$$x - 5 < 3 \Rightarrow x < 8 \Rightarrow x \in (-\infty; 8).$$

2)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} < \frac{1}{8}$ .

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} < \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Оскільки  $\frac{1}{2} < 1$ , функція є спадною, то знак нерівності зміниться на протилежний:

$$x - 5 > 3 \Rightarrow x > 8 \Rightarrow x \in (8; +\infty).$$

$$3) \ 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 \leq 0.$$

Оскільки  $3^{2x} = (3^x)^2$ , зробимо заміну  $t = 3^x$ ,  $t > 0$ :

$$t^2 - 10t + 9 \leq 0$$

Знаходимо корені квадратного тричлена  $t^2 - 10t + 9$ :

$$t_1 = 1, \ t_2 = 9.$$

$$t^2 - 10t + 9 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq t \leq 9.$$

Повертаємося до змінної  $x$ :

$$1 \leq 3^x \leq 9 \Rightarrow 3^0 \leq 3^x \leq 3^2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \in [0; 2].$$

## **РОЗДІЛ II. Методичні підходи до вивчення показникової функції**

### **2.1 Місце показникової функції в шкільному курсі алгебри**

#### ***1. Роль показникової функції у шкільному курсі математики***

Показникова функція – один із ключових розділів алгебри, який формує основи для подальшого вивчення логарифмічної функції, яка вивчається одразу після неї. Учні знайомляться з поняттям взаємно обернених функцій, що є ключовим для розуміння багатьох тем курсу алгебри і початків аналізу. Ця тема демонструє учням приклади зростання та спадання величин за експоненціальним законом, що має практичне значення при вивченні реальних прикладних задач – таких як моделювання демографічних процесів, фінансові розрахунки, задачі на складні відсотки тощо.

Таким чином, показникова функція у шкільному курсі математики не лише формує важливі теоретичні знання, а й розвиває практичні навички моделювання реальних процесів, сприяє формуванню в учнів логічного мислення та вмінь працювати з різними методами розв’язування задач підвищеної складності.

#### ***2. Послідовність вивчення у шкільній програмі***

Вивчення показникової функції у школі будується на принципі поступовості. Спершу учні знайомляться з поняттям степеня з натуральним показником (7 клас), потім – з властивостями степенів із цілим та дробовим показником (8–9 класи). Це формує базу для подальшого розуміння експоненційної залежності.

У 10 класі учні поглиблюють знання про загальні властивості функцій, зокрема поняття області визначення, множини значень, зростання і спадання, що готує їх до вивчення показникової та логарифмічної функцій.

Основний матеріал про показникову функцію розглядається у 11 класі. Учні знайомляться з означенням, властивостями та графіком, розв'язують показникові рівняння й нерівності, застосовують ці знання для розв'язання прикладних задач. У профільних класах за підручниками Істера О. С. та Єргіної О. В. [2] додатково вивчаються складніші приклади, зокрема системи показникових рівнянь.

Послідовне засвоєння теми сприяє підготовці до вивчення логарифмічної функції, що є оберненою до показникової, і забезпечує цілісне розуміння взаємозв'язку елементарних функцій.

### **3. Основні аспекти вивчення показникової функції**

Вивчення показникової функції у шкільному курсі математики охоплює кілька ключових аспектів, які формують у школярів цілісне уявлення про цю функціональну залежність і навчають застосовувати її на практиці.

Перш за все, учні знайомляться з *означенням* показникової функції як функції вигляду  $y = a^x$ , де основа  $a > 0$  і  $a \neq 1$ . Розглядаються її властивості залежно від значення основи: зростання або спадання, область визначення та область значень.

Другим важливим аспектом є *графічне зображення* показникової функції. Учні вчаться будувати графіки для різних значень основи, порівнювати їх, робити висновки про поведінку функції та застосовувати графічний метод для розв'язування рівнянь і нерівностей.

Наступним аспектом є *методи розв'язування* показникових рівнянь та нерівностей. Розглядаються прийоми зведення виразів до однієї основи, введення нової змінної, логарифмування та комбіновані методи. Для учнів профільних класів у підручниках авторів Істера О. С. та Єргіної О. В. [2] подаються приклади розв'язування не лише окремих рівнянь, а й систем показникових рівнянь і нерівностей.

Окрему увагу приділяють *прикладним задачам*, що демонструють використання експоненційної залежності у реальному житті, як от у фінансовій

сфері відсоткові накопичення, зростання капіталу, у фізиці моделі радіоактивного розпаду, розрядка батареї, у біології зростання популяцій, процеси ферментації і т.д. Такі приклади допомагають учням усвідомити практичну цінність показникової функції.

Важливою складовою є *підготовка до вивчення логарифмічної функції як оберненої до показникової*. Це дає змогу показати взаємозв'язок між темами та забезпечує системність у формуванні знань.

Таким чином, основні аспекти вивчення показникової функції спрямовані на розвиток теоретичних знань, практичних умінь та здатності використовувати математичні поняття для опису реальних процесів.

#### **4. Методичні аспекти викладання**

Методичні аспекти викладання показникової функції спрямовані на забезпечення доступного та послідовного засвоєння матеріалу учнями різного рівня підготовки. Вони охоплюють організацію подачі теоретичного матеріалу, добір прикладів і завдань, використання наочності та формування навичок самостійного розв'язування задач.

Насамперед учителю важливо чітко сформулювати поняття показникової функції та пояснити умову, за якої вона визначається. Значну роль відіграє демонстрація різних випадків поведінки функції залежно від основи. Використання графічних ілюстрацій допомагає учням зрозуміти зміни форми графіка та властивості функції.

Підхід до навчання показникової функції передбачає такі ключові принципи:

1. **Наочність.** Широко застосовується побудова графіків, використання симуляцій і цифрових інструментів, таких як графічні калькулятори чи спеціальне програмне забезпечення (GeoGebra [16]). Це дозволяє наочно продемонструвати вплив параметрів на вигляд графіка.
2. **Інтерактивність.** Важливо залучати учнів до аналізу прикладів із реального життя, наприклад, задач про зростання банківського вкладу чи

приріст населення. Такий підхід підвищує мотивацію та демонструє практичну цінність знань.

3. **Міжпредметні зв'язки.** Викладання теми передбачає інтеграцію знань з інших предметів: фізики (процеси радіоактивного розпаду), економіки (моделювання зростання або зменшення активів). Це сприяє розвитку цілісного світогляду та розумінню практичного значення експоненційної залежності.

Особливу роль відіграє робота з показниковими рівняннями й нерівностями. Учитель демонструє різні методи їх розв'язування: зведення до спільної основи, введення нової змінної, логарифмування. У профільних класах доцільно розглядати складніші приклади – системи показникових рівнянь і нерівностей, що стимулюють розвиток аналітичного мислення.

Типи завдань, що використовуються під час викладання теми, умовно можна поділити на:

- **Теоретичні вправи:** виведення властивостей функції, графічний аналіз.
- **Розрахункові:** розв'язування показникових рівнянь і нерівностей.
- **Прикладні:** задачі на зростання або спадання у реальному житті.

Ефективність викладання теми забезпечується поєднанням чіткої теоретичної бази, різноманітних типів завдань, використання сучасних технологій і залучення учнів до аналізу прикладних ситуацій.

Таким чином, методичні аспекти викладання показникової функції поєднують теоретичну чіткість, наочність, різноманітність завдань і зв'язок з практикою, що забезпечує якісне засвоєння теми учнями.

## 5. Значення для учнів

Вивчення показникової функції має важливе значення для розвитку математичної культури школярів і формування в них навичок практичного застосування знань. Ця тема сприяє не лише засвоєнню конкретних математичних понять, а й розвитку загальноінтелектуальних умінь.

По-перше, робота з показниковою функцією допомагає **розвивати математичне мислення**: учні навчаються знаходити закономірності, аналізувати різні способи розв'язування задач, порівнювати методи та узагальнювати отримані результати.

По-друге, вивчення цієї теми готує школярів до **національного мультипредметного тесту (НМТ)** та подальшого навчання у вищій школі. Показникові та логарифмічні рівняння є обов'язковими для шкільного курсу і входять до переліку тем, що перевіряються під час державної підсумкової атестації чи вступних випробувань. Крім того, засвоєння основ показникової функції створює міцний фундамент для вивчення вищої математики.

По-третє, показникова функція має значне **практичне застосування**: розв'язування прикладних задач дає учням уявлення про те, як математика пояснює процеси реального світу – наприклад, фінансові розрахунки, демографічні зміни чи фізичні явища. Це формує розуміння того, що математичні знання є дієвим інструментом для аналізу та прогнозування різних життєвих ситуацій.

Таким чином, опанування показникової функції сприяє розвитку логічного мислення, підготовці до подальшого навчання та формує у школярів уміння бачити практичну цінність математики у повсякденному житті.

## 6. Зв'язок із іншими темами курсу

Вивчення показникової функції тісно пов'язане з низкою інших тем шкільного курсу математики, що підкреслює її важливу роль у формуванні цілісної математичної картини.

По-перше, показникова функція є основою для засвоєння **логарифмічної функції**, оскільки логарифм визначається як обернена функція до показникової. Це дозволяє учням глибше зрозуміти поняття взаємно обернених функцій і властивості логарифмічних виразів.

По-друге, поняття експоненти має зв'язок із темою **тригонометрії**, зокрема при вивченні експоненційної форми комплексних чисел. Хоча цей

аспект часто виходить за межі базового шкільного курсу, у профільних класах та під час підготовки до вищої математики він відіграє важливу роль.

По-третє, знання властивостей показникової функції активно використовується при розв'язуванні **рівнянь і нерівностей**, зокрема складних комбінованих задач, що передбачають застосування кількох методів одночасно.

Таким чином, тема показникової функції забезпечує методичний і змістовий зв'язок між окремими розділами курсу, сприяючи формуванню в учнів цілісного уявлення про математичні закономірності.

## **2.2 Огляд підручників з алгебри щодо висвітлення теми**

### **«Показникова функція»**

Тема «Показникова функція» займає важливе місце у змісті шкільних підручників з алгебри і початків аналізу для 11 класу, що відповідає чинним навчальним програмам Міністерства освіти і науки України. Розглянемо особливості подання цього матеріалу у найпоширеніших виданнях.

У підручнику **О. С. Істера** «Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. 11 клас. Рівень стандарту» [3] тема подається у розділі 1 «Показникова та логарифмічна функції» послідовно: від степеня з довільним дійсним показником до означення показникової функції та її властивостей, побудови графіків, застосування до розв'язування прикладних задач (§ 1), розв'язування простих і складних рівнянь (§ 2) та нерівностей (§ 3).

Підручник **Г. П. Бевза та В. Г. Бевз** «Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. 11 клас. Рівень стандарту» [1] також висвітлює цю тему у розділі 1 «Показникові та логарифмічні функції», зокрема § 1 присвячений степеневим та показниковим функціям, а § 2 – показниковим рівнянням та нерівностям. Автори роблять акцент на порівнянні степеневої і показникової функцій, формулюють властивості показникових функцій, і розглядають такі основні підходи до розв'язання показникових рівнянь і нерівностей, як метод зведення обидвох частин до степенів з однаковими основами, метод введення

нової змінної та функціонально-графічний метод. Теорія супроводжується багатьма вправами, серед яких багато на усне обчислення та вправи із ЗНО.

У підручнику **А. Г. Мерзляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського та М. С. Якіря** «Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. 11 клас» [8] тема подається в § 1 доступно і ґрунтовно. Особливістю є велика кількість задач різного рівня складності: від базових до вправ підвищеної складності. Автори звертають увагу на графічний метод та на підготовку учнів до розв'язування комбінованих рівнянь і нерівностей.

У підручниках для профільних класів, зокрема у виданнях [2, 7, 9, 11] тема розглядається глибше й ширше:

включають додаткові властивості:

- детальний розгляд властивостей монотонності;
- властивості оберненої функції (підготовка до логарифмічної);
- зв'язок з логарифмічною функцією;
- складніші приклади перетворень графіка;
- більше практики: складні рівняння, системи, не лише елементарні;

часто подають більше завдань на:

- розв'язування показникових нерівностей;
- застосування показникової функції до прикладних задач (експоненційне зростання, радіоактивний розпад, фінансові задачі);
- комбіновані задачі разом із логарифмами;

пояснюють глибше: можуть наводити доведення окремих властивостей, які на рівні стандарту тільки формулюють.

У профільних класах більше задач підготовки до ЗНО/НМТ (тестові завдання підвищеної складності).

Таким чином, у більшості сучасних підручників з алгебри тема «Показникова функція» розкривається ґрунтовно, із дотриманням принципів доступності, наочності та практичної спрямованості. Різноманіття поданих вправ дозволяє учням сформулювати як теоретичні знання, так і практичні вміння

для успішного виконання завдань у шкільному курсі та на державній підсумковій атестації.

## **2.3 Методико-педагогічні проблеми при вивченні показникової функції**

Наведемо основні методико-педагогічні проблеми, які виникають при вивченні показникової функції.

### **1. Недостатній рівень базових знань**

*Проблема:*

Для успішного вивчення показникової функції необхідне глибоке розуміння попередніх тем: степенів з цілими й дробовими показниками, властивостей функцій. Однак багато учнів мають прогалини в цих знаннях, що ускладнює сприйняття нового матеріалу. Складність викликає необхідність одночасного засвоєння теоретичних понять і навичок їх застосування.

*Шляхи вирішення:*

- ✓ Перед початком теми проводити повторення та актуалізацію знань учнів, наприклад, у вигляді міні-лекцій, тестів чи інтерактивних вправ.
- ✓ Вводити показникову функцію через конкретні приклади, які пов'язані з уже відомими учням поняттями, наприклад, зростання чисел у геометричній прогресії.

### **2. Складність у розумінні абстрактних понять**

*Проблема:*

Учні часто сприймають математичні поняття механічно, не розуміючи їх суті, наприклад: показникова функція  $y = a^x$  для  $a > 1$  демонструє стрімке зростання, але без візуалізації це залишається абстрактним фактом.

Графіки функцій можуть викликати труднощі через недостатній рівень навичок побудови, особливо якщо функція не є лінійною чи квадратичною.

*Шляхи вирішення:*

- ✓ Використання інтерактивних інструментів для побудови графіків, таких як GeoGebra [16] чи Desmos [15]. Учні можуть самостійно спостерігати зміну графіка залежно від параметра  $a$ .
- ✓ Пояснення через аналогії, наприклад: зв'язок між показниковою функцією і реальними явищами (ріст населення, збільшення депозиту в банку, процес радіоактивного розпаду).

### 3. Відсутність практичного контексту

*Проблема:*

Теоретичний підхід до викладання теми часто не демонструє її практичного значення. Це знижує мотивацію учнів, оскільки вони не бачать, як ці знання можна використати у реальному житті.

*Шляхи вирішення:*

- ❖ Включення до уроків задач із реального життя, наприклад [4, 13]:
- ✓ Розрахунок складних відсотків у банківських вкладах.
- ✓ Моделювання епідемій (зростання числа хворих за експоненціальним законом).
- ✓ Вивчення процесу радіоактивного розпаду (експоненціальне зменшення).
- ❖ Проведення дослідницьких проєктів, де учні аналізують реальні дані (наприклад, демографічну статистику чи фінансові показники).

### 4. Обмеження у використанні сучасних технологій

*Проблема:*

Не всі школи забезпечені комп'ютерами чи графічними калькуляторами, що ускладнює використання сучасних методів візуалізації.

Учителі іноді не володіють методикою роботи з онлайн-ресурсами.

*Шляхи вирішення:*

- ✓ Використання безкоштовних онлайн-інструментів (GeoGebra [16], Desmos [15], WolframAlpha [17]), які доступні навіть із мобільних пристроїв.

- ✓ Проведення семінарів для підвищення кваліфікації вчителів, де вони знайомляться з новими цифровими методами навчання.

## **5. Неврахування індивідуальних особливостей учнів**

*Проблема:*

У класі можуть бути учні з різним рівнем підготовки, через що одноманітний підхід до викладання може бути неефективним.

Деяким учням потрібен більше часу для освоєння теми, інші швидко розуміють матеріал і втрачають інтерес.

*Шляхи вирішення:*

Застосування диференційованого підходу:

- ✓ Поділ завдань на рівні складності (базовий, середній, підвищений).
- ✓ Надання сильнішим учням індивідуальних завдань для самостійного опрацювання.
- ✓ Організація групової роботи, де сильніші учні допомагають слабшим.

## **6. Складність оцінювання знань**

*Проблема:*

Стандартні тестові завдання часто перевіряють лише механічне виконання алгоритмів, але не розуміння учнями суті показникової функції.

*Шляхи вирішення:*

- ✓ Розробка компетентісно орієнтованих завдань, які перевіряють не лише знання формул, але й уміння застосовувати їх у різних ситуаціях.
- ✓ Використання відкритих задач, де учні повинні самостійно знайти спосіб розв'язання.

### **2.4 Застосування показникової функції в інших галузях знань**

Показникова функція є потужним математичним інструментом, що знаходить широке застосування у багатьох наукових, технічних, економічних і соціальних галузях. Її властивості, зокрема стрімкий ріст або зменшення

залежно від параметрів, дозволяють моделювати складні процеси, які зустрічаються у реальному світі [4, 13].

## 1. Фізика

- ✓ Процес радіоактивного розпаду: радіоактивний розпад описується показниковою функцією. Кількість радіоактивної речовини зменшується за формулою:  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ .
- ✓ Закон охолодження Ньютона: температура тіла, що охолоджується, змінюється за показниковим законом.
- ✓ Електротехніка: зарядка і розрядка конденсаторів у ланцюгах описується показниковими залежностями.

## 2. Біологія

- ✓ Зростання популяції: зростання чисельності популяцій у середовищі з необмеженими ресурсами описується експоненційною моделлю:  $P(t) = P_0 e^{rt}$ .
- ✓ Фармакологія: виведення лікарських препаратів із організму або їхня концентрація у крові часто моделюються за показниковим законом.

## 3. Економіка

- ✓ Складний відсоток: розрахунок зростання капіталу за складним відсотком описується формулою:

$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}.$$

- ✓ Інфляція та девальвація: показникові функції використовуються для моделювання зміни вартості грошей або цін на товари.
- ✓ Ріст попиту або продажів: у маркетингу та бізнесі експоненціальні функції застосовують для прогнозування росту продажів чи впровадження нових продуктів.

#### 4. Хімія

- ✓ Швидкість хімічних реакцій: закон Арреніуса описує залежність швидкості хімічної реакції від температури:  $k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}$ .
- ✓ Розпад речовин: подібно до фізики, розпад хімічних сполук часто підпорядковується показниковій залежності.

#### 5. Інформатика

- ✓ Складність алгоритмів: експоненційна функція описує складність деяких алгоритмів, наприклад, при переборі можливих варіантів у задачах оптимізації.
- ✓ Криптографія: показникова функція є основою багатьох криптографічних методів, наприклад, алгоритму Диффі-Геллмана.

#### 6. Медицина та епідеміологія

- ✓ Розповсюдження інфекцій: епідемії на початкових етапах поширення моделюються показниковою функцією, що враховує стрімке зростання числа інфікованих.
- ✓ Демографічні моделі: зростання чисельності населення або його зменшення через певні фактори часто описується експоненціальними моделями.

#### 7. Соціологія

- ✓ Динаміка поширення інформації: показникова функція використовується для моделювання вірусного поширення інформації в соціальних мережах або через медіа.
- ✓ Моделі адаптації: темпи адаптації людей до нових умов чи технологій часто описуються за експоненційним законом.

## **8. Астрономія та космологія**

- ✓ Ріст Всесвіту: у моделях розширення Всесвіту, зокрема в космології, експоненціальні функції описують темпи розширення на різних етапах його розвитку.
- ✓ Світлове згасання: інтенсивність світла, що проходить через певне середовище, зменшується експоненційно залежно від його щільності.

## **9. Екологія**

- ✓ Ріст лісів чи біомаси: у сприятливих умовах зростання біомаси рослин часто моделюється експоненційною залежністю.
- ✓ Забруднення середовища: показникова функція використовується для оцінки концентрації шкідливих речовин у повітрі, воді чи ґрунті з плином часу.

## **2.5 Розробка уроку з вивчення властивостей показникової функції**

**Тема уроку:** Властивості показникової функції

**Клас:** 11

**Мета уроку:**

1. Ознайомити учнів з основними властивостями показникової функції.
2. Навчити будувати графіки показникової функції та аналізувати їх.
3. Розвивати логічне мислення, увагу та вміння застосовувати знання на практиці.

**Обладнання:**

- Мультимедійна презентація.
- Графічний планшет або дошка.
- Підручники.
- Роздатковий матеріал із вправами.

**Хід уроку**

### ***1. Організаційний момент (3 хв)***

- Привітання учнів.

- Перевірка присутніх.
- Налаштування на роботу.

## **II. Актуалізація знань (5 хв)**

1. Питання до класу:

- Що таке функція?
- Які функції ви вже знаєте?
- Що означає «показникова» функція?

2. Демонстрація загального вигляду показникової функції:

$$y = a^x, \text{ де } a > 0, a \neq 1.$$

3. Повторення понять основи функції, змінної та області визначення.

## **III. Вивчення нового матеріалу (20 хв)**

1. Означення показникової функції:

Показникова функція – це функція вигляду  $y = a^x$ , де  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , а  $x$  – дійсне число.

2. Властивості показникової функції:

- ☒ Область визначення:  $x \in \mathbb{R}$ .
- ☒ Область значень:  $y > 0$ .
- ☒ Функція є зростаючою при  $a > 0$  та спадною при  $0 < a < 1$ .
- ☒ Графік не перетинає вісь  $OX$ .
- ☒ Точка перетину графіка з віссю  $OY$ :  $(0; 1)$ .

3. Графічне зображення:

- Побудова графіків для різних значень  $a$ :  $y = 2^x$ ,  $y = 0,5^x$ .
- Порівняння форм графіків.

4. Поведінка при  $x \rightarrow +\infty$  та  $x \rightarrow -\infty$ .

## **IV. Закріплення знань (10 хв)**

1. Виконання вправ:

- Побудувати графік функції  $y = 3^x$ .
  - Визначити, зростає чи спадає функція  $y = 0,7^x$ .
  - Знайти область значень функції  $y = 5^x$ .
2. Робота в парах: аналіз графіків інших функцій та пояснення властивостей.

#### ***V. Підсумок уроку (5 хв)***

1. Узагальнення вивченого:
  - ✓ Основні властивості показникової функції.
  - ✓ Особливості графіків.
2. Запитання до учнів:
 

Як поводить ся показникова функція при  $x \rightarrow +\infty$ ?

Чому графік не перетинає вісь  $OX$ ?
3. Оцінювання роботи учнів.

#### ***VI. Домашнє завдання***

1. Теорія: опрацювати параграф у підручнику.
2. Практика:
  - Побудувати графіки функцій  $y = 4^x$  і  $y = 0,25^x$ .
  - Розв'язати задачі: знайти область визначення і множину значень функції  $y = 1,5^x$ .

## **2.6 Розробка контрольної роботи**

### **Контрольна робота**

**Тема:** «Показникова функція»

**Мета:** перевірка знань і вмінь учнів з теми «Показникова функція».

**Критерії оцінювання:**

Перший рівень (тестові завдання):

- 2 завдання  $\times$  0,5 бала = 1 бал

Другий рівень (завдання на обчислення):

- Побудова графіка – 1 бал
- 3 обчислення (а, b, c)  $\times$  1 бал = 3 бали

Разом за 2 рівень: 4 бали

Третій рівень (завдання підвищеної складності):

- Розв'язання рівнянь (a, b, c) – 2 бали
- Розв'язання нерівностей (a, b) – 2 бали
- Задача (знайти значення) – 3 бали

Разом за 3 рівень:  $2 + 2 + 3 = 7$  балів.

Загальна сума:

- 1 рівень: 1 бал
- 2 рівень: 4 бали
- 3 рівень: 7 балів

Максимальна кількість балів: 12.

***Перший рівень (тестові завдання):***

1. Вкажіть область визначення функції  $y = 3^x$ :
  - a)  $(-\infty; +\infty)$ ;
  - b)  $[0; +\infty)$ ;
  - c)  $(-\infty; 0]$ ;
  - d)  $[1; +\infty)$ .
2. Знайдіть значення  $y$  для функції  $y = 2^x$ , якщо  $x = 3$ .
  - a) 4;
  - b) 8;
  - c) 16;
  - d) 9.
3. Якою є функція  $y = a^x$ , якщо  $a > 1$ :
  - a) зростаюча;
  - b) спадна;
  - c) стала;
  - d) немає правильної відповіді.

***Другий рівень (завдання на обчислення)***

1. Побудуйте графік функції  $y = 3^x$  у координатній площині для  $x = -2; -1; 0; 1; 2$ .

2. Обчисліть:

a)  $5^2 - 5^0 =$

b)  $2^3 \cdot 2^{-4} =$

c)  $\frac{3^4}{3^2} =$

***Третій рівень (завдання підвищеної складності)***

1. Розв'яжіть рівняння:

a)  $2^x = 8;$

b)  $3^{x+1} = 27;$

c)  $4^{x+2} = 16.$

2. Розв'яжіть нерівність:

a)  $2^x > 4;$

b)  $5^x \leq 25.$

3. Задача.

Знайдіть, при якому значенні  $x$  виконується рівність  $a^{x+1} = a^3$ , якщо  $a > 0$ .

## **2.7 Експериментальна перевірка розробленої методики**

З метою оцінювання ефективності запропонованої методики перевірки знань учнів з теми «Показникова функція» було проведено експериментальне дослідження серед учнів Ліцею № 2 Дрогобицької міської ради.

У дослідженні взяли участь 28 учнів 10-А класу. Учням було запропоновано виконати контрольну роботу, що включала завдання трьох рівнів складності:

- перший рівень – тестові завдання;
- другий рівень – завдання на обчислення;
- третій рівень – задачі підвищеної складності.

Оцінювання здійснювалося за такими критеріями:

| №                           | Рівень завдання                                                 | Завдання                                       | Макс.балів      | Оцінка<br>учня |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------|----------------|
| 1                           | <u>Перший рівень</u><br><u>(тести)</u>                          | Вказати<br>область<br>визначення<br>функції    | 0,5             |                |
| 2                           |                                                                 | Визначити<br>зростання<br>/спадання<br>функції | 0,5             |                |
| <b>Разом за 1 рівень:</b>   |                                                                 |                                                | <b>1 бал</b>    |                |
| 3                           | <u>Другий рівень(обчислення)</u>                                | Побудова<br>графіка функції                    | 1               |                |
| 4                           |                                                                 | Обчислити (а)                                  | 1               |                |
| 5                           |                                                                 | Обчислити (b)                                  | 1               |                |
| 6                           |                                                                 | Обчислити (с)                                  | 1               |                |
| <b>Разом за 2 рівень:</b>   |                                                                 |                                                | <b>4 бали</b>   |                |
| 7                           | <u>Третій рівень</u><br><u>(підвищена</u><br><u>складність)</u> | Розв'язати<br>рівняння( а,b,c)                 | 2               |                |
| 8                           |                                                                 | Розв'язати<br>нерівності( а,b)                 | 2               |                |
| 9                           |                                                                 | Задача: знайти<br>значення                     | 3               |                |
| <b>Разом за 3 рівень :</b>  |                                                                 |                                                | <b>7 балів</b>  |                |
| <b>Загальна сума балів:</b> |                                                                 |                                                | <b>12 балів</b> |                |

Результати експерименту:

- 86% учнів (24 з 28) правильно виконали більшість завдань I рівня, що підтверджує добре засвоєння теоретичного матеріалу.
- 71% учнів (20 з 28) показали достатній рівень сформованих обчислювальних навичок при виконанні завдань II рівня.
- 46% учнів (13 з 28) успішно впоралися із завданнями III рівня, продемонструвавши вміння застосовувати знання в нестандартних ситуаціях та логічно мислити.

Запропонована методика є ефективною для перевірки знань з теми «Показникова функція», адже вона:

- забезпечує диференційований підхід до оцінювання;
- дозволяє визначити рівень засвоєння як базових, так і складніших понять;
- сприяє розвитку аналітичного та критичного мислення учнів.

### РОЗДІЛ III. Завдання з теми «Показникова функція», які пропонувались на ЗНО та НМТ

Завдання ЗНО [6, 14]

#### ЗНО - 2016

1. Якому проміжку належить корінь рівняння  $2^x = \frac{1}{8}$ ?

Оскільки  $8 = 2^3$ ;  $2^x = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$ .

$x = -3$  належить проміжку  $(-4; -2]$ .

#### ЗНО - 2018

2. Розв'яжіть рівняння  $3^x = 81 \cdot 9^x$ .

За допомогою таблиці степенів:

$$3^x = 3^4 \cdot 3^{2x}.$$

За властивістю, при множенні степенів з однаковими основами показники додаються:

$$3^x = 3^{4+2x} \Rightarrow x = 4 + 2x \Rightarrow x - 2x = 4 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4.$$

#### ЗНО - 2019

3. Встановіть область визначення функції:

$$y = \frac{2^x}{x - 3}.$$

$$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3.$$

Відповідь:  $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ .

#### ЗНО - 2019

4. Розв'язати рівняння:  $4^x + 2^{x+1} = 48$ .

$$(2^2)^x + 2 \cdot 2^x = 48.$$

Заміна:  $2^x = t$ ;

$$t^2 + 2t - 48 = 0;$$

$$t = \frac{-2 \mp \sqrt{4 + 192}}{2} = \frac{-2 \mp 14}{2};$$

$t_1 = -8$  відкидаємо, оскільки  $2^x > 0$ ;

$$t_2 = 6 \Rightarrow 2^x = 6 \Rightarrow x = \log_2 6.$$

### **ЗНО - 2015**

**5. Розв'яжіть нерівність:**  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{1}{32}$ .

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ; оскільки  $\frac{1}{2} < 1$ , то знак нерівності змінюється;

$$x \leq 5.$$

*Відповідь:*  $(-\infty; 5]$ .

### **ЗНО - 2015**

**6. Якщо  $2^a = \frac{1}{5}$ , то  $2^{6-a} =$**

$$2^{6-a} = \frac{2^6}{2^a} = \frac{64}{\frac{1}{5}} \Rightarrow 64 \cdot 5 = 320.$$

### **ЗНО - 2018**

**7. Розв'яжіть нерівність  $2^x + 2^{x+3} \geq 144$ .**

$$2^x(1 + 8) \geq 144 \Rightarrow 2^x \cdot 9 \geq 144 \Rightarrow 2^x \geq 16 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^x \geq 2^4 \Rightarrow x \geq 4.$$

*Відповідь:*  $[4; +\infty)$ .

### **Завдання НМТ [6, 14]**

### **НМТ - 2023**

**8. Установіть відповідність між функцією та її властивістю:**

$$y = 2^x.$$

Оскільки основа більша 1 ( $2 > 1$ ), то функція є зростаючою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ .

9. У відповідність функцію  $y = 2^{-x}$  із кількістю спільних точок її графіка з прямою  $y = x + 3$ .

$$y = 2^{-x} \Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Оскільки функція  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  спадна, а функція  $y = x + 3$  зростаюча, то їх графіки перетинаються лише в одній точці.

10. Яке з наведених чисел є розв'язком нерівності  $5^{-x} > 25$ ?

$$5^{-x} > 25,$$

$$5^{-x} > 5^2,$$

$$-x > 2, \quad | \cdot (-1)$$

$$x < -2,$$

$$x \in (-\infty; -2).$$

Оскільки число  $-3$  належить цьому проміжку, то це і буде правильна відповідь.

### НМТ – 2025

11. Розв'яжіть нерівність  $7^x \leq \frac{1}{49}$ .

1. Записуємо праву частину як степінь числа 7:  $\frac{1}{49} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$ .

2. Порівнюємо степені з однаковою основою:  $7^x \leq 7^{-2} \Rightarrow x \leq -2$ .

3. Записуємо відповідь у вигляді проміжку:  $x \in (-\infty; -2]$ .

## ВИСНОВКИ

Показникова функція – одна з ключових тем у курсі шкільної математики, яка має важливе значення не лише з точки зору формування предметних компетентностей, а й розвитку загального математичного мислення, логіки та здатності до моделювання реальних процесів. Саме тому ефективна методика її викладання потребує глибокого аналізу як змісту навчального матеріалу, так і дидактичних підходів до його подачі.

Перший розділ дослідження було присвячено теоретичним аспектам теми. Поняття степеня з довільним дійсним показником стало основою для введення показникової функції. Вивчення означення, властивостей та графіка цієї функції дало змогу побудувати цілісну картину, необхідну для засвоєння теми. Крім того, було розглянуто способи розв'язування показникових рівнянь і нерівностей, що дозволяє учням застосовувати здобуті знання у практичних задачах.

У другому розділі акцент зроблено на методичних аспектах викладання. Проаналізовано місце теми у шкільному курсі алгебри та сучасних підручниках, що дозволило виявити переваги й недоліки існуючих підходів. Звернено увагу на типові помилки учнів і труднощі у сприйнятті абстрактних понять, що дає змогу вчителю заздалегідь передбачити і подолати можливі прогалини. Значущим є розгляд міжпредметних зв'язків і застосувань показникової функції в реальному житті (наприклад, у фінансових розрахунках, біологічних процесах, фізичних закономірностях). Це допомагає зробити навчання більш змістовним та мотивувальним.

Наявність розробок уроку, контрольної роботи та експериментальної перевірки методики засвідчують її практичну спрямованість і результативність. Учні, які навчалися за цією методикою, продемонстрували кращі результати та глибше розуміння теми.

Третій розділ, у якому зібрано завдання з теми, що пропонувались на ЗНО та НМТ, підтверджує, що показникова функція залишається актуальною і важливою для оцінювання навчальних досягнень випускників. Саме тому варто

приділяти особливу увагу систематизації знань, відпрацюванню типових і нестандартних задач, формуванню гнучких навичок розв'язування.

Методика викладання показникової функції має бути побудована з урахуванням логіки вивчення, психолого-педагогічних особливостей учнів, принципів наочності, доступності та системності. Поєднання теорії, практики, міжпредметних зв'язків та підготовки до зовнішнього оцінювання дає змогу не лише забезпечити якісне засвоєння матеріалу, а й сформувати в учнів математичну компетентність як життєво необхідну.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К.: Освіта, 2019. – 272 с.
2. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу : (профіль. рівень) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. – К. : Генеза, 2019. – 416 с.
3. Істер О. С. Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер. – К.: Генеза, 2019. – 304 с.
4. Колебанова І., Прус А. Задачі прикладної спрямованості, які призначені для вивчення показникової та логарифмічної функцій на засадах НУШ. UNIVERSUM. – 2023. – № 1. – С. 113–123. – Режим доступу: <https://archive.liga.science/index.php/universum/article/view/438/439>
5. Комарницька Л., Лазарів Ю. Методика вивчення показникової функції у шкільному курсі математики // Актуальні проблеми сучасної науки: Матеріали XII Міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій / За ред. Ю. Матуріна, І. Столярчука. – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка, 2025. – С. 212–214.
6. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО і ДПА 2021 (профільний рівень і рівень стандарту) / Капіносов А. М. та ін. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2020. – 480 с.
7. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. – 352 с.
8. Мерзляк А. Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти /

- А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. – 208 с.
9. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл. : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. – 304 с.
10. Навчальна програма з математики для 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Затверджена МОН України, 2017.
11. Нелін Є. П. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Х. : Гімназія, 2011. – 448 с.
12. Освітній портал «На Урок» – <https://naurok.com.ua>
13. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. – Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. – 128 с.
14. Тести ЗНО/НМТ онлайн з математики. – Режим доступу: <https://zno.osvita.ua/mathematics/>
15. <https://www.desmos.com/calculator?lang=uk>
16. <https://www.geogebra.org/?lang=uk>
17. <https://www.wolframalpha.com/>