

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана
Франка

Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

Завідувач кафедри математики та економіки,

Кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

« ____ » _____ 2025р.

ПРОПЕДЕВТИКА ВИВЧЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
НА ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИКИ У ЗАКЛАДАХ ФАХОВОЇ
ПЕРЕДВИЩОЇ ОСВІТИ

Спеціальність: 014 Середня освіта (за предметними спеціальностями)

Предметна спеціальність: 014.04 Середня освіта (Математика)

Додаткова предметна спеціальність: 014.09 Середня освіта

(Інформатика)

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації:

«Магістр середньої освіти. Вчитель математики, вчитель інформатики»

Автор роботи:

Дум'як Христина Степанівна _____

Науковий керівник:

Професор, доктор фізико-математичних наук

Дільний Володимир Миколайович _____

Дрогобич, 2025

Захист магістерської роботи

«Пропедевтика вивчення інтегральних рівнянь на заняттях з математики у закладах фахової передвищої освіти»

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

дата

Голова ЕК

підпис

прізвище, ім'я

Секретар ЕК

підпис

прізвище, ім'я

Анотація. Дум'як Христина. Пропедевтика вивчення інтегральних рівнянь на заняттях з математики у закладах фахової передвищої освіти

У магістерській роботі проведено дослідження рівнянь типу згортки для аналітичних функцій у півсмугових областях. Розглянуто простори типу Гарді, властивості аналітичних функцій, їх граничні значення та поведінку в геометрично обмежених областях. На основі інтегральної формули Коші, аналізу нулів породжувальних функцій та розкладів на елементарні дроби встановлено критерії існування та єдності розв'язків згорткових рівнянь. Доведено, що для певних класів функцій рівняння має лише тривіальний розв'язок, а для інших - може мати періодичні та аналітично продовжувані розв'язки.

Ключові слова: згортка, аналітичні функції, півсмуга, періодичність, простори Гарді, інтегральна формула Коші, аналітичне продовження, функції експоненціального типу.

Abstract. Dumiak Khrystyna. Propaedeutics of Studying Integral Equations in Mathematics Courses at Institutions of Professional Pre-Higher Education

The master's thesis studies convolution-type equations for analytic functions in half-band domains. Hardy-type spaces, properties of analytic functions, their boundary values, and behavior in geometrically bounded domains are considered. Based on the Cauchy integral formula, analysis of zeros of generating functions, and expansions into elementary fractions, the criteria for the existence and unity of solutions of convolution equations are established. It is proved that for certain classes of functions the equation has only a trivial solution, and for others it can have periodic and analytically continued solutions.

Keywords: convolution, analytic functions, half-band, periodicity, Hardy spaces, Cauchy integral formula, analytical continuation, exponential-type functions.

Зміст

Анотація	2
Вступ	5
Розділ I. Огляд літератури	10
Розділ II. Властивості розв’язків рівняння типу згортки у півсмугових областях.....	13
Розділ III. Пропедевтика інтегральних рівнянь у закладах фахової передвищої освіти	27
Висновки.....	27
Список використаних джерел	32

Вступ

Актуальність теми

Пропедевтика інтегральних рівнянь у закладах фахової передвищої освіти має важливе значення для підготовки майбутніх фахівців. Сучасні математичні моделі широко використовують інтегральні оператори. До таких моделей належать і рівняння типу згортки у півсмузі. Вони лежать в основі аналізу сигналів, обробки інформації та опису багатьох фізичних процесів.

Дослідження рівнянь типу згортки є важливою частиною сучасного математичного аналізу, зокрема теорії аналітичних функцій і функціонального аналізу. Такі рівняння виникають у задачах математичної фізики та при вивченні крайових задач для диференціальних рівнянь. Особливий інтерес становить вивчення рівнянь типу згортки у пів смузі, де поєднуються аналітичні та граничні властивості функцій. У таких областях поведінка розв'язків суттєво залежить від аналітичності в межах області та від наявності кутових граничних значень.

Дослідження рівнянь типу згортки в аналітичних просторах, що мають природну норму і повноту, дозволяє встановити умови існування та єдності розв'язків, а також описати періодичність функцій, які задовольняють ці рівняння. Отримані результати мають теоретичне значення для розвитку теорії аналітичних просторів і практичне значення для математичного моделювання процесів, що описуються загортковим співвідношенням.

Зв'язок теми з освітнім середовищем, зокрема з курсом математики у закладах фахової передвищої освіти, також є важливим. Хоча рівняння типу згортки не входять до базового курсу математики, ключові ідеї, що лежать в їх основі, безпосередньо пов'язані з програмовими темами:

інтеграли, властивості функцій, перетворення, періодичність, гармонічний аналіз, елементи комплексних чисел та тригонометрії. Застосування таких понять у контексті складніших теоретичних конструкцій дозволяє продемонструвати учням старших класів та закладів фахової передвищої освіти взаємозв'язок між шкільною та університетською математикою, а також мотивувати їх до вивчення аналітичних методів. Тема має потенціал для застосування на факультативних заняттях, у математичних гуртках та під час олімпіадної підготовки, де аналіз поведінки функцій, використання інтегральних формул та дослідження періодичності є поширеними напрямками.

Таким чином, дослідження рівнянь типу згортки у півсмузі об'єднує як фундаментальний теоретичний інтерес, так і навчально-методичну значущість, що визначає його актуальність та важливість для сучасної математичної науки.

Мета і завдання дослідження

Метою магістерської роботи є дослідження існування та єдності розв'язків рівняння типу згортки у півсмузі для аналітичних функцій, а також встановлення властивостей таких розв'язків (зокрема періодичності та обмеженості).

Для досягнення цієї мети передбачено розв'язати такі завдання:

- визначити простори аналітичних функцій у пів смузі, для яких можна конкретно поставити задачу типу згортки;
- дослідити умови, за яких функція є розв'язком загорткового рівняння;
- довести існування і єдність розв'язків для певних класів функцій;
- встановити періодичні властивості функцій, що задовольняють рівняння згортки;

- розглянути приклади функцій експоненціального типу та перевірити їх належність відповідним аналітичним просторам.

Об'єкт і предмет дослідження

Об'єктом дослідження є властивості аналітичних функцій, які є розв'язками таких рівнянь, зокрема умови їх існування, єдності та періодичності.

Предметом дослідження є рівняння типу згортки в областях комплексної площини.

Методи дослідження

У роботі застосовано методи теорії аналітичних функцій комплексної змінної, елементи функціонального аналізу, інтегральні перетворення та класичні прийоми гармонічного аналізу. Використано також інтегральну формулу Коші для пів смуги та методи розкладу функцій на елементарні дробки.

Наукова новизна одержаних результатів

У магістерській роботі:

- доведено існування та єдність розв'язку рівняння типу згортки у півсмугі для аналітичних функцій певного класу;
- встановлено умови, за яких функція, що належить простору A , є розв'язком рівняння, якщо відповідна функція має нуль певного порядку;
- показано, що для деяких аналітичних функцій розв'язки є періодичними з дійсним періодом;

- досліджено властивості функцій експоненціального типу, які задовольняють умови належності до простору аналітичних функцій у пів смузі.

Практичне значення роботи

Результати дослідження мають теоретичне значення для подальшого розвитку теорії аналітичних просторів та рівнянь типу згортки. Вони можуть бути використані при розв'язування прикладних задач математичної фізики та математичного аналізу, що описуються рівняннями типу згортки.

Структура роботи

Структура магістерської роботи вибудована таким чином, щоб послідовно та логічно розкрити теоретичні засади рівнянь типу згортки, проаналізувати особливості їх застосування у півсмугових областях та представити отримані результати. Робота складається з таких основних частин:

Вступ. Містить розгорнуте обґрунтування актуальності теми, її наукової та прикладної значущості, формулювання мети й завдань, визначення об'єкта та предмета дослідження. Окремо подано розширений аналіз зв'язку досліджуваної теми з елементами шкільного курсу математики, факультативів, підготовки до олімпіад та поглибленого вивчення інтегралів.

Розділ 1. Огляд літератури. Охоплює аналіз наукових праць вітчизняних і зарубіжних дослідників, які працювали над проблемами аналітичних функцій, просторів типу Гарді, рівнянь згорткового типу, аналізу нулів аналітичних функцій та питань періодичності. Наведено ключові результати Б. Винницького, Н. Нікольського, В. Дільного та інших

авторів. Показано важливість просторових обмежень та граничних умов для формування теорії.

Розділ 2. Властивості розв'язків рівняння типу згортки у півсмузі. Містить основні результати дослідження. Докладно розглянуто умови існування та єдності розв'язків, застосування інтегральної формули Коші, аналіз періодичності та аналітичного продовження функцій у трапецієподібні області. Наведено конкретні приклади функцій експоненціального типу, розглянуто їх розклади та поведінку у півсмузі.

Висновки. Подано узагальнення отриманих результатів, окреслено наукову новизну та практичне значення роботи, зроблено акцент на можливостях використання отриманих результатів у математичній освіті, олімпіадній підготовці та науково-дослідній діяльності учнів.

Список використаних джерел. Містить повний перелік наукових праць, що стали теоретичним підґрунтям дослідження. Він охоплює класичні та сучасні роботи з теорії аналітичних функцій, функціонального аналізу, гармонічного аналізу та просторових узагальнень рівнянь згортки.

Апробація результатів

Результати магістерської роботи доповідалися на XII Міжнародній науково-практичній студентсько-викладацькій конференції “Актуальні проблеми сучасної науки”. [https://drive.google.com/file/d/1Mq0-Wqa0C_mIaXAlI36dzC-uDIxWYXrl/view С. 175] та опубліковані у журналі категорії Б "Математика, інформатика, фізика: наука та освіта" <https://vspu.net/miph/index.php/journal/issue/view/4> С. 198]

Розділ I. Огляд літератури

Теорія рівнянь типу згортки сформувалася на стику аналітичної теорії функцій, теорії інтегральних перетворень та функціонального аналізу. Класичні дослідження зосереджувалися на вивченні згорток у просторах голоморфних функцій у півплощині. Саме там виникли перші фундаментальні результати щодо існування умов існування та єдності розв'язки, структури нулів породжуючих функцій та їх впливу на характер розв'язку.

Згодом дослідницький інтерес було перенесено у більш вузькі області, зокрема у півсмугу, для якої характерні складніші граничні явища. На відміну від півплощини, півсмуга має дві граничні прямі. Це створює специфічні аналітичні умови: функція не лише повинна бути аналітичною всередині області, але й задовольняти узгоджені граничні обмеження на горизонтальних. Прямих, що вимагає застосування більш делікатних методів.

У літературі зазначається, що рівняння типу згортки в аналітичних просторах часто пов'язані з властивостями функцій експоненціального типу, просторів Гарді, а також класів функцій зі зростанням, контрольованим у напрямку дійсної осі. Це зумовило використання інструментів комплексного аналізу: інтегральних формул Коші, теорем про нулі аналітичних функцій тощо.

Питання існування та єдності розв'язків рівнянь типу згортки вивчалися у працях [2], [4], [5] М. Джрбашяна, Дж. Якубовського, М. Віснєвольського, Н. Нікольського, Дж. Машрегі, Б. В. Винницького та його учнів і співробітників, багатьох інших математиків, продовжують викликати значний інтерес в останні десятиліття. Багато в чому цей інтерес зумовлений застосуваннями різного типу згорток у теорії інформації, зокрема задачах шифрування, передачі та відтворення інформації.

Однією з найвпливовіших у цій сфері є праці Б. Винницького, що заклали основи теорії однорідних рівнянь згортки. Винницький показав, що структура нулів породжуючої функції визначає існування нетривіальних розв'язків.

Його підхід включав аналіз полюсів і нулів функцій експоненціального типу, застосування інтегральних формул для поведінки розв'язків, побудову нулів функцій, що задовольняють рівняння типу згортки, вивчення повноти системи експонент у просторах аналітичних функцій.

Результати Винницького стали фундаментальними, оскільки вони показали, що розв'язки рівнянь типу згортки у таких просторах тісно пов'язані з геометрією нулів породжуючої функції. Це згодом стало базою для дослідження задач у півсмузі, де взаємодія полюсів, граничних значень та асимптотичних властивостей має ще складніший характер.

Значний внесок у розвиток теорії функцій експоненціального типу та просторів аналітичних функцій зробив Н. К. Нікольський [5], [6]. У його роботах розглядаються простори Гарді та їх властивості, питання обмеженості функції на границі області, аналітичність та її збереження при застосуванні інтегральних операторів. Результати Нікольського визначили базові інструменти для аналізу аналітичних функцій, що дозволяє описувати обмеженість, періодичність та аналітичну продовжуваність функцій – саме ті характеристики, які відіграють ключову роль у задачах типу згортки.

Учні та співробітники В. Винницького, зокрема В. Дільний, Т. Гіщак, Х. Войтович у своїх роботах системно досліджували функції експоненціального типу, їх граничні властивості та асимптотичну поведінку. Їх праці є важливими для сучасної теорії, оскільки функції експоненціального типу часто виступають породжувачами у рівняннях

згортки. Зокрема, результати Дільного щодо опису нулів, структури полюсів та умов належності до певних аналітичних просторів забезпечують можливість точного формулювання критеріїв існування та єдиності розв'язків рівняння типу згортки. Роботи Дільного також містять ефективні підходи до дослідження періодичності та поведінки функцій у півсмузі, що безпосередньо перегукується з цілями даної магістерської роботи.

В сучасних дослідженнях приділяють увагу поведінці аналітичних функцій у складних геометричних областях, зокрема в нескінченних трапецієподібних областях або в областях типу півсмуги. У таких роботах детально аналізується вплив розташування полюсів породжуючої функції на аналітичність розв'язків. Поширеним інструментом є розклади на елементарні дроби та інтегральні формули Коші, адаптовані до відповідних областей, що дозволяє отримати достатні умови існування та опис структури розв'язків рівняння згортки. У літературі також окреслено низку питань, що залишаються відкритими, зокрема пов'язаних із рівняннями згортки для функцій, породжуюча частина яких має обмежену кількість полюсів у півсмузі. Це робить дослідження у даному напрямі актуальним та логічно продовжує попередні теоретичні напрацювання. Таким чином, аналіз літератури свідчить, що науковий інтерес зосереджений навколо проблеми встановлення умов існування, єдиності та опису поведінки розв'язків рівняння типу згортки в аналітичних просторах. Праці Б. Винницького та його учнів, Н. Нікольського, П. Кусіса, Дж. Машрегі [5],[6] формують теоретичний фундамент, на який спираються сучасні дослідження і забезпечують необхідний інструментарій для аналізу рівнянь згортки у півсмугових областях.

Розділ II. Властивості розв'язків рівняння типу згортки у півсмугових областях

Розглянемо простори типу Гарді у півсмугових областях, які ввів Б. Винницький у [2].

Нехай

$$\mathcal{D}_\sigma = \{z : |Im z| < \sigma, Re z < 0\}, 0 \leq \sigma < +\infty,$$

$\mathcal{D}_\sigma^* = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{D}_\sigma}$ а $E^p[\mathcal{D}_\sigma]$ і $E_*^p[\mathcal{D}_\sigma]$, $1 \leq p < +\infty$, - простори функцій, аналітичних відповідно в $\mathcal{D}_\sigma$ і $\mathcal{D}_\sigma^*$, для яких

$$\sup \left\{ \int_\gamma |f(z)|^p dz \right\} < +\infty$$

де супремум береться за всіма відрізками γ , які лежать відповідно в $\mathcal{D}_\sigma$ і $\mathcal{D}_\sigma^*$ (можна розглядати тільки ті відрізки γ , які паралельні принаймні одній із сторін $\partial\mathcal{D}_\sigma$). Функції f із цих просторів мають майже всюди (м.в.) на $\partial\mathcal{D}_\sigma$ кутові граничні значення (їх позначасмо через $f(z)$ і, отже, f природним чином визначена м.в. на $\partial\mathcal{D}_\sigma$, $f \in L^p(\partial\mathcal{D}_\sigma)$ і кожний із просторів $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ і $E_*^2[\mathcal{D}_\sigma]$ є повним відносно норми

$$\|f\| = \left(\int_{\partial\mathcal{D}_\sigma} |f(z)|^2 dz \right)^{1/2}.$$

Згідно з лемою 2 [1], функція $f(\omega) = \omega^{m-1} e^{\lambda\omega}$, $m \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}_+$, є розв'язком рівняння

$$\int_{\partial\mathcal{D}_\sigma} f(\omega + \tau) g(\omega) d\omega = 0, \quad \tau \leq 0, \quad g \in E_*^2[\mathcal{D}_\sigma], \quad (1)$$

тоді і тільки тоді, коли в точці λ функція

$$G(\omega) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\partial\mathcal{D}_\sigma} g(z) e^{z\omega} dz.$$

має нуль порядку $k \geq m$.

Б. Винницький довів прямим методом [1], що для

$$g(\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_1}, \quad \omega_1 \in \mathcal{D}_\sigma,$$

рівняння (1) має тільки нульовий розв'язок. Однак сума двох таких функцій g_1, g_2 для яких рівняння згортки має тільки нульовий розв'язок, не обов'язково є функцією, що володіє тією ж властивістю. Нашим завданням є отримання методів виявлення наявності розв'язків рівняння (1) для функцій g , що визначаються скінченною кількістю полюсів у півсмуговій області.

Ми встановили наступне твердження.

Теорема 1. Нехай $g(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}$, де $\omega_1 \neq \omega_2$ і $\omega_1 - \omega_2 \in \mathbb{R}, \omega_1 \in \mathcal{D}_\sigma, \omega_2 \in \mathcal{D}_\sigma$. Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок $f \equiv 0$.

Доведення. Нехай

$$g(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}, \quad \omega_1 \neq \omega_2, \quad \omega_1 \in \mathcal{D}_\sigma, \omega_2 \in \mathbb{R}.$$

Для того, щоб знайти розв'язки рівняння (1), розкладемо функцію $g(\omega)$ на елементарні дробки:

$$g(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = \frac{A}{(\omega - \omega_1)} + \frac{B}{(\omega - \omega_2)} \quad | \cdot (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)$$

$$1 = A(\omega - \omega_2) + B(\omega - \omega_1)$$

$$1 = A\omega - A\omega_2 + B\omega - B\omega_1$$

$$1 = (A + B)\omega - (A\omega_2 + B\omega_1)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A\omega_2-B\omega_1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ -A\omega_2+A\omega_1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-a \\ A(-\omega_2+\omega_1) \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2}; \quad B = \frac{-1}{\omega_1 - \omega_2}$$

Отже,

$$g(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = \frac{1}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega - \omega_1)} - \frac{1}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega - \omega_2)}$$

Підставимо значення функції $g(\omega)$ у ліву частину рівняння (1):

$$\int_{\partial \mathbb{D}_\sigma} f(\omega + \tau) \left(\frac{1}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega - \omega_1)} - \frac{1}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega - \omega_2)} \right) d\omega = 0$$

Тоді

$$\int_{\partial \mathbb{D}_\sigma} \frac{f(\omega + \tau)}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega - \omega_1)} - \frac{f(\omega + \tau)}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega - \omega_2)} d\omega = 0.$$

Звідси ми отримаємо

$$\frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \int_{\partial \mathbb{D}_\sigma} \frac{f(\omega + \tau)}{(\omega - \omega_1)} - \frac{f(\omega + \tau)}{(\omega - \omega_2)} d\omega = 0.$$

За інтегральною формулою Коші для півсмуки [2]

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathbb{D}_\sigma} \frac{f(\omega + \tau)}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega - \omega_1)} - \frac{f(\omega + \tau)}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega - \omega_2)} d\omega = \\ = \frac{2\pi i}{\omega_2 - \omega_1} \cdot (2\pi i(f(\omega_1 + \tau) - f(\omega_2 + \tau))) \end{aligned}$$

Отже, отримаємо наступну рівність

$$\frac{2\pi i}{\omega_2 - \omega_1} \cdot (2\pi i(f(\omega_1 + \tau) - f(\omega_2 + \tau))) \equiv 0, \forall \tau \leq 0.$$

Звідси випливає, що

$$f(\omega_1 + \tau) \equiv f(\omega_2 + \tau), \forall \tau \leq 0.$$

Нехай $\tau = 0$. Тоді отримаємо, що, $f(\omega_1) = f(\omega_2)$. Отже, можна зробити висновок, що при довільних $\tau \leq 0$ також значення

$$f(\omega_1 + \tau) \text{ і } f(\omega_2 + \tau)$$

співпадають.

Введемо нове позначення

$$\tilde{f}_1(\tau) = f(\omega_1 + \tau);$$

Тоді

$$f(\omega_2 + \tau) = f(\omega_1 + (\omega_2 - \omega_1 + \tau)) = \tilde{f}_1(\omega_2 - \omega_1 + \tau)$$

Звідси

$$\tilde{f}_1(\tau) \equiv \tilde{f}_1(\omega_2 - \omega_1 + \tau).$$

Це означає, що функція f періодична з періодом $(\omega_2 - \omega_1)$.

Якщо $(\omega_2 - \omega_1)$ – дійсне число, то функція f – періодична з цим дійсним періодом. Доведемо, що оскільки f належить $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$, то $f \equiv 0$.

Справді, $\tilde{f}_1$ є періодичною функцією. Припустимо, що вона тотожно не дорівнює нулю. Тоді

$$\int_{\gamma_1} |\tilde{f}_1(\omega)|^2 d\omega = \beta, \quad \beta > 0, \quad \gamma_1 = [\omega_1; \omega_2]$$

Розглянемо нескінченний промінь $[-\infty + Im(\omega_2); \omega_2]$, що складається з нескінченної кількості відрізків довжини $\ddot{\omega} = \omega_2 - \omega_1$, тоді інтеграл

$$\int_{\gamma_1} |\tilde{f}_1(\omega)|^2 d\omega = \beta, \quad \beta > 0, \quad \gamma_1 = [\omega_1; \omega_2]$$

дорівнює сумі інтегралів по відрізках $\ddot{\omega}$. Оскільки на кожному з цих відрізків $\int_{\gamma_1} |\tilde{f}_1(\omega)|^2 d\omega = \beta, \beta > 0$, що означає, що сума нескінченної кількості інтегралів буде нескінченною. Ми отримали суперечність.

Це означає, що якщо функція f – періодична з дійсним періодом і належить $E^2[\mathcal{D}_\sigma]$, то $f \equiv 0$.

Теорему доведено.

З доведення теореми випливає наступне твердження.

Наслідок. Якщо $f \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$ і є періодичною, то звідси випливає, що $f \equiv 0$.

Розглянемо випадок, коли $\omega_1 = \omega_2, \omega_1 \in \mathcal{D}_\sigma, \omega_2 \in \mathcal{D}_\sigma$.

Тоді

$$g(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = \frac{1}{(\omega - \omega_1)^2}$$

Теорема 2

Нехай $g(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)^2} \in E^2[\mathcal{D}_\sigma]$, тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок $f \equiv 0$.

Доведення

За інтегральною формулою Коші для пів смуги (Винницький «О нулях»)

$$\int_{\partial D_\sigma} \frac{f(\omega + \tau)}{\omega - \omega_1} d\omega = 2\pi i f(\omega_1 + \tau) \quad (2)$$

— аналітична відносно ω_1 .

Продиференціювавши (2) по $\omega_1 \in D_\sigma$, отримаємо

$$\left(\int_{\partial D_\sigma} \frac{f(\omega + \tau)}{\omega - \omega_1} d\omega \right)'_{\omega_1} = (2\pi i f(\omega_1 + \tau))'$$

$$\int_{\partial D_\sigma} f(\omega + \tau) \left(\frac{1}{\omega - \omega_1} \right)'_{\omega_1} d\omega = f'(\omega_1 + \tau),$$

де

$$\left(\frac{1}{\omega - \omega_1} \right)'_{\omega_1} = \frac{1}{(\omega - \omega_1)^2}.$$

Оскільки

$$\int_{\partial D_\sigma} \frac{f(\omega + \tau)}{\omega - \omega_1} d\omega = 2\pi i f(\omega_1 + \tau) = 0, \forall \tau \leq 0,$$

то

$$\int_{\partial D_\sigma} \frac{f(\omega + \tau)}{(\omega - \omega_1)^2} d\omega = 2\pi i f'(\omega_1 + \tau) = 0$$

Звідси

$$f'(\omega_1 + \tau) \equiv 0, \forall \tau \leq 0.$$

Тоді функція $f(\omega)$ є сталою і $f(\omega) \in E^2[\mathbb{D}_\sigma]$.

Рівняння

$$\int_{\partial \mathbb{D}_\sigma} f(\omega + \tau) g(\omega) d\omega = 0, \quad \tau \leq 0, \quad g \in E_*^2[\mathbb{D}_\sigma]$$

має єдиний розв'язок $f \equiv 0$.

Припустимо, що $f = c, c \neq 0$.

Тоді функція $f(\omega)$ не належить $E^2[\mathbb{D}_\sigma]$.

Отже, $f \equiv 0$.

Теорему доведено.

Узагальнимо отримане твердження на випадок довільного $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. Нехай $g(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)^n}, n \in \mathbb{N}$, тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок $f \equiv 0$.

Доведення. За інтегральною формулою Коші для півсмуки [2] виконується формула

$$\int_{\partial D_\sigma} \frac{f(\omega + \tau)}{\omega - \omega_1} d\omega = 2\pi i f(\omega_1 + \tau) \quad (3)$$

і функція в правій частині останньої рівності аналітична відносно ω_1 .

Продиференціювавши рівність (3) по $\omega_1 \in D_\sigma$, отримаємо

$$\left(\int_{\partial D_\sigma} \frac{f(\omega + \tau)}{\omega - \omega_1} d\omega \right)'_{\omega_1} = (2\pi i f(\omega_1 + \tau))'$$

$$\int_{\partial D_\sigma} f(\omega + \tau) \left(\frac{1}{\omega - \omega_1} \right)'_{\omega_1} d\omega = f'(\omega_1 + \tau),$$

бо

$$\left(\frac{1}{\omega - \omega_1} \right)'_{\omega_1} = \frac{1}{(\omega - \omega_1)^2}.$$

Повторивши диференціювання $n - 1$ разів, отримаємо рівність

$$n \int_{\partial D_\sigma} f(\omega + \tau) \left(\frac{1}{\omega - \omega_1} \right)^{(n+1)}_{\omega_1} d\omega = f^{(n)}(\omega_1 + \tau).$$

Тоді

$$f^{(n-1)}(\omega_1 + \tau) = c_1;$$

$$f^{(n-2)}(\omega_1 + \tau) = \int_{\partial D_\sigma} f^{(n-2)}(\omega + \tau) \left(\frac{1}{\omega - \omega_1} \right)^{(n+1)}_{\omega_1} d\omega = c_1 x + c_2;$$

Остаточно отримаємо

$$f(\omega_1 + \tau) = c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \dots + c_n, \quad (4)$$

де $c_1, c_2, \dots, c_n$ – комплексні сталі.

Оскільки (4) є многочленом, що є необмеженою функцією в $\mathcal{D}_\sigma$, то

$$f(\omega_1 + \tau) \neq c_1 x^n + c_2 x^{n-1} + \dots + c_n.$$

Ця суперечність доводить, що

$$f(\omega_1 + \tau) \notin E^2[\mathcal{D}_\sigma].$$

Звідси

$$f(\omega_1 + \tau) \equiv 0, \forall \tau \leq 0.$$

Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок $f \equiv 0$.

Теорему доведено.

Розглянемо тепер випадок, коли $\omega_2 - \omega_1 \notin \mathbb{R}$.

Нам відомо, що

$$\tilde{f}_1(\tau) = \tilde{f}_1(\omega_2 - \omega_1 + \tau) = \tilde{f}_1(2\omega_2 - 2\omega_1 + \tau),$$

де $(\omega_2 - \omega_1)$ – період функції $\tilde{f}_1$ як функції аргумента $\tau < 0$.

Використавши дану періодичність, отримаємо, що $\tilde{f}_1$ існує за межами D_σ і

буде визначена в нескінченних трапеціях T_1 , коли $Im(\omega_2 - \omega_1) > 0$ та T_2 , коли $Im(\omega_2 - \omega_1) < 0$.

Сформулюємо ці означення точніше.

Трапеція T_1 визначається множиною таких точок ω , що

$$\arg(\omega - i\sigma) < \arg(\omega_2 - \omega_1).$$

Тобто,

$$T_1 = \{\omega: Re(\omega) < 0, Im(\omega) > -\sigma, \arg(\omega - i\sigma) < \arg(\omega_2 - \omega_1)\}$$

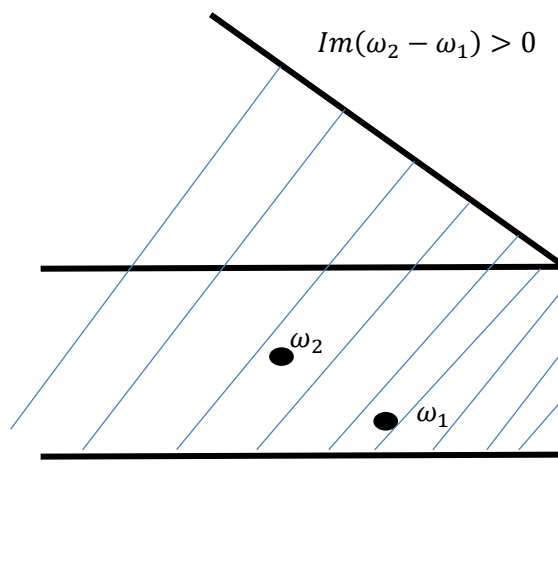


Рис.1

Приклад. Нехай

$$T_1 = \{\omega: Re(\omega) < 0, Im(\omega) > -\sigma, \arg(\omega - i\sigma) < \arg(\omega_2 - \omega_1)\},$$

$$де \omega_1 = -\sigma, \omega_2 = \frac{i\sigma}{2} - 2\sigma.$$

Тоді

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{i\sigma}{2} - 2\sigma - (-\sigma) = \frac{i\sigma}{2} + \sigma.$$

$$\arg(\omega_2 - \omega_1) = \varphi, \text{ де}$$

$$\varphi = \begin{cases} \cos \varphi = \frac{-\sigma}{|z|} \\ \sin \varphi = \frac{\sigma/2}{|z|} \end{cases}, \varphi \in [0; 2\pi]$$

$$\text{Оскільки } z = \frac{i\sigma}{2} + \sigma, |z| = \frac{\sigma\sqrt{5}}{2}, \text{ то}$$

$$\varphi = \begin{cases} \cos \varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Отже,

$$\arg(\omega_2 - \omega_1) = \pi - \arctg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Тоді

$$T_1 = \left\{ \omega: \operatorname{Re}(\omega) < 0, \operatorname{Im}(\omega) > -\sigma, \arg(\omega - i\sigma) < \pi - \arctg\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$$

Аналогічно, трапеція T_2 можна визначити як множину таких точок ω , що

$$\arg(\omega + i\sigma) > \arg(\omega_2 - \omega_1).$$

Тобто,

$$T_2 = \{ \omega: \operatorname{Re}(\omega) < 0, \operatorname{Im}(\omega) < \sigma, \arg(\omega + i\sigma) > \arg(\omega_2 - \omega_1) \}$$

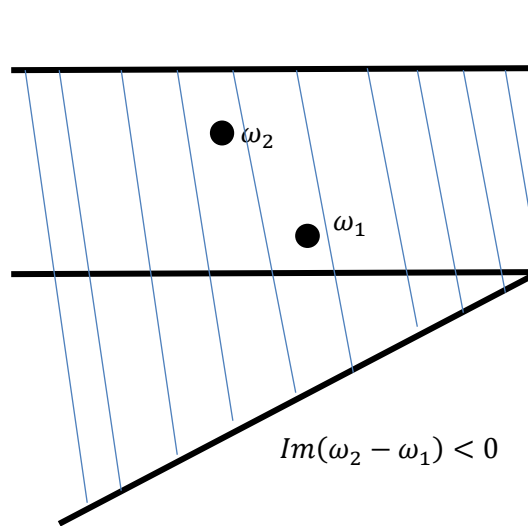


Рис.2

З вищенаведених міркувань випливає наступне твердження.

Теорема 4. Якщо f є розв'язком рівняння (1), де

$$g(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}, \quad \omega_1 - \omega_2 \notin \mathbb{R},$$

то функція f є аналітичною в нескінченній трапеціїх T_1 , коли $\text{Im}(\omega_2 - \omega_1) > 0$ та T_2 , коли $\text{Im}(\omega_2 - \omega_1) < 0$,

а також періодичною на кожному промені

$$L_s = \{\omega: \arg(\omega - is) = \arg(\omega_2 - \omega_1), s \in [0; \sigma)\}. \quad [8]$$

Розглянемо функцію $f(z) = e^{e^{-z}}$, де $z = x + iy$.

За формулою Ейлера

$$f(z) = e^{e^{-z}} = e^{e^{-x-iy}} = e^{-x(\cos(-y)+i\sin(-y))} \quad (5)$$

Отже, функція (5) періодична відносно змінної y .

Справді, функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$ є періодичними функціями з періодом $T = 2\pi$, тому $\cos(y) - i \sin(y)$ є періодичною функцією.

Отже,

$$e^{-x(\cos(-y)+i\sin(-y))}$$

є періодичною з тим же періодом.

Функція f є обмеженою для $z \in T_1$, бо

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |e^{e^{-z}}| = |e^{e^{-x-iy}}| = |e^{e^{-x}(\cos(-y)+i\sin(-y))}| = \\ &= |e^{e^{-x}(\cos y - i \sin y)}| = e^{e^{-x} \cdot \cos y} < e, \end{aligned}$$

бо $\cos y \leq 1$, $e^{-x} < 1$.

Тобто, функція (5) періодична відносно $y = \text{Im } z$ та обмежена.

Розглянемо функцію

$$\bar{f}(z) = e^{e^{-z}} \cdot e^{-z} = e^{e^{-z}-z} \quad (6)$$

Функція (6) є періодичною відносно y як добуток двох періодичних функцій.

Розглянемо функцію $\bar{f}(z \cdot e^{i\alpha})$, що є поворотом функції (6) на деякий кут α .

$$\text{Нехай } \omega_1 = -\frac{\sigma}{2}; \quad \omega_2 = -\sigma + \frac{\sigma i}{2}.$$

Тоді

$$\arg(\omega_2 - \omega_1) = \frac{3\pi}{4}$$

Тоді

$$\bar{f}(z \cdot e^{-i\alpha}) = e^{e^{-z \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} - z \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}}}$$

Покладемо

$$z = u_0 + \rho e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{f}(z \cdot e^{-i\alpha}) &= e^{e^{-z \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} - z \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}}} = e^{e^{-\left(u_0 + \rho e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) e^{i\frac{3\pi}{4}}}} \cdot e^{-\left(u_0 + \rho e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \\ &= e^{e^{-e^{i\frac{3\pi}{4}} u_0 - e^{i\frac{3\pi}{2}} \rho}} \cdot e^{-e^{i\frac{3\pi}{4}} u_0 - e^{i\frac{3\pi}{2}} \rho} \end{aligned}$$

Оскільки $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$, то

$$\bar{f}(z \cdot e^{-i\alpha}) = e^{e^{-e^{i\frac{3\pi}{4}} u_0 + i\rho}} \cdot e^{-e^{i\frac{3\pi}{4}} u_0 + i\rho} =: \psi(\rho)$$

Позначимо

$$\psi_1(\rho) = e^{-e^{i\frac{3\pi}{4}} u_0 + i\rho}$$

Отримаємо

$$\psi(\rho) = e^{\psi_1(\rho)} \cdot \psi_1(\rho)$$

Тоді

$$\psi_1(\rho) = e^{-e^{i\frac{3\pi}{4}} u_0 + i\rho} = e^{-e^{i\frac{3\pi}{4}} u_0} \cdot e^{i\rho} = e^{-e^{i\frac{3\pi}{4}} u_0} \cdot (\cos \rho + i \sin \rho)$$

Функції

$$f(\rho) = \cos \rho \text{ та } f(\rho) = \sin \rho$$

є періодичними з періодом $T = 2\pi$, а $e^{-e^{i\frac{3\pi}{4}}u_0}$ - стала відносно ρ , тому функція

$$\psi_1(\rho) = e^{-e^{i\frac{3\pi}{4}}u_0 + i\rho}$$

є періодичною відносно змінної ρ .

Звідси, функція

$$\psi(\rho) = e^{\psi_1(\rho)} \cdot \psi_1(\rho)$$

є періодичною з періодом $T = 2\pi$.

Перевіримо, чи функція (6) належить $E^2[D_\sigma]$.

Перевіримо спочатку чи є обмеженою функція (6) в $E^2[D_\sigma]$

$$|\bar{f}(z)| = |e^{e^{-x} \cdot e^{-iy}} \cdot e^{-x} \cdot e^{-iy}| = |e^{e^{-x} \cdot e^{-iy}}| \cdot |e^{-x} \cdot e^{-iy}| = e^{e^{-x} \cos y} \cdot e^{-x} \leq e^{e^{-x}} \cdot e^{-x}.$$

Оскільки $e^{e^{-x}}$ є обмеженою, а $e^{-x} \in E^2[D_\sigma]$, то $\bar{f}(z) \in E^2[D_\sigma]$.

За означенням простору нам потрібно перевірити належність функції

$$\bar{\bar{f}}(z \cdot e^{-i\alpha}) = e^{e^{-z \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}} - z \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

простору $E^2[\overline{\overline{T1}}]$, де

$$\overline{\overline{T1}} = \{\omega = x + iy: y > -1, x < 0, y < -(1 - \varepsilon)x\}, 0 < \varepsilon < 1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} |\bar{\bar{f}}(z \cdot e^{-i\alpha})| &= \left| e^{e^{-z \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}} - z \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right| = \left| e^{e^{-z \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}}} \cdot e^{-z \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right| \\ &= \left| e^{e^{-z \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}}} \right| \cdot \left| e^{-z \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right| \end{aligned}$$

Обчислимо кожен модуль окремо:

$$\left| e^{e^{-z} \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}} \right| = \left| e^{e^{-(x+iy)(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)}} \right| = \left| e^{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) + i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x))}} \right| = e^{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x))}},$$

$$\left| e^{-(x+iy)\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)} \right| = \left| e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + \frac{\sqrt{2}}{2}i(-x+y)} \right| = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)}.$$

Функція $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)}$ є обмеженою, коли $z \in \overline{T1}$, бо $x + y < 0$.

Оскільки функція $\cos\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)$ є обмеженою і $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)} \leq 1$

при

$z \in \overline{T1}$ і $e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)}$ належить $E^2[\overline{T1}]$, то функція

$$\bar{f}(z \cdot e^{-i\alpha}) = e^{e^{-z} \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} - z \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}} \in E^2[\overline{T1}].$$

Розділ III. Пропедевтика інтегральних рівнянь у закладах фахової передвищої освіти

Пропедевтика інтегральних рівнянь у закладах фахової передвищої освіти відіграє важливу роль у формуванні в здобувачів цілісного уявлення про сучасний математичний аналіз і його прикладні можливості. Хоча повноцінне вивчення інтегральних рівнянь, зокрема рівнянь типу згортки, належить до курсу вищої математики, окремі ідеї та методи можуть бути адаптовані до рівня коледжів і фахових коледжів у вигляді підготовчого, пропедевтичного матеріалу.

У межах шкільної та математики у закладах фахової передвищої освіти інтеграл зазвичай розглядається як інструмент обчислення площ, об'ємів або роботи сили. Пропедевтичний підхід дозволяє розширити це уявлення та показати інтеграл як оператор, що перетворює одну функцію на іншу. Саме таке розуміння є ключовим для подальшого засвоєння інтегральних рівнянь, у яких невідомою величиною є функція. Цей підхід безпосередньо пов'язаний з ідеями магістерської роботи, де згортка розглядається як інтегральний оператор спеціального виду.

Особливе місце в пропедевтиці доцільно відвести інтегральним рівнянням типу згортки. На доступному рівні студентам можна продемонструвати, що згортка описує вплив попередніх значень функції на поточний стан системи. Такий підхід є інтуїтивно зрозумілим і дозволяє пов'язати абстрактні математичні конструкції з прикладними задачами. Навіть без використання апарату комплексного аналізу можна показати, що форма ядра згортки визначає поведінку розв'язку, зокрема його обмеженість або періодичність.

Важливим елементом пропедевтики є формування уявлень про області визначення функцій. У магістерській роботі суттєву роль відіграє півсмуга як геометрична область, у якій досліджуються аналітичні властивості функцій. У закладах фахової передвищої освіти ці ідеї можуть бути представлені через аналіз поведінки функцій на проміжках, напівінтервалах та при переході до граничних значень. Це створює підґрунтя для подальшого розуміння складніших областей, зокрема півсмугових.

Пропедевтичне вивчення інтегральних рівнянь також тісно пов'язане з темою періодичних функцій. У роботі показано, що періодичність породжуючої функції може зумовлювати періодичність розв'язку рівняння

типу згортки. У коледжах ці ідеї можуть бути реалізовані через поглиблене вивчення тригонометричних функцій, аналіз їхніх властивостей та застосування інтегралів до періодичних процесів.

З методичної точки зору пропедевтика інтегральних рівнянь сприяє розвитку аналітичного мислення, вміння працювати з функціональними залежностями та розуміння ролі математичних моделей у прикладних задачах. Вона забезпечує логічний зв'язок між базовим курсом математики та елементами вищої математики, що є особливо важливим для здобувачів фахової передвищої освіти технічного та природничого профілю.

Таким чином, пропедевтика інтегральних рівнянь, орієнтована на ідеї згортки та аналізу функцій у півсмугових областях, створює необхідну основу для подальшого вивчення складніших математичних концепцій. Вона дозволяє поєднати теоретичні положення магістерської роботи з навчальним процесом у закладах фахової передвищої освіти та підвищити практичну спрямованість математичної підготовки здобувачів.

Висновки

У магістерській роботі здійснено дослідження рівняння типу згортки в півмузі для аналітичних функцій, що належить відповідним просторам типу Гарді. Проведений аналіз дав можливість встановити умови існування та єдиності розв'язків, визначити їхню граничну поведінку та описати властивості, зокрема періодичність і можливість аналітичного продовження в розширених областях.

На початку роботи було окреслено простори аналітичних функцій у півсмузі, введені у роботах Б. Вінницького. Визначено норми, граничні значення та ключові характеристики цих просторів, що є необхідними для формулювання і доведення основних тверджень. Особливу увагу приділено тому факту, що функції з таких просторів мають, власне, кутові граничні значення, що дозволяє переходити від аналітичних властивостей у внутрішній області до поведінки функцій на межі.

У роботі доведено кілька теорем. Перша з них встановлює достатні умови існування й єдиності розв'язків рівнянь типу згортки для функцій, що породжуються ядром, яке є скінченною сумою елементарних дробів. Використання цього розкладу, а також інтегральної формули Коші для півсмути, дало можливість зберегти явний вигляд розв'язків та показати їх періодичність. Важливим наслідком цього є твердження про можливість існування неперіодичних функцій у просторі, що накладає суттєві обмеження на можливі розв'язки.

У іншій теоремі було показано, що для певного класу функцій, що породжують ядро, рівняння не може мати ненульових розв'язків. Це дає чіткі критерії, для яких рівняння типу згортки має лише тривіальний розв'язок.

У третій теоремі розглядається випадок періодичних функцій, що дозволило суттєво розширити область аналітичності розв'язку. Показано,

що такі функції можуть бути аналітично продовжені поза півсмуги в нескінченні трапецієподібні області, що дає можливість досліджувати розв'язки за допомогою ширших класів функцій та аналізувати їх у глобальному контексті.

Окрема частина роботи присвячена дослідженню функцій експоненціального типу, що часто виступають породжувальними у рівнях згорткового типу. На конкретних прикладах доведено їх періодичність, обмеження та необхідність відповідним просторам. Розгляд цих прикладів дозволяє глибше зрозуміти конструкцію зв'язків та їхню поведінку в півмузі.

З навчально-методичного погляду отримані результати мають цінність для поглибленого вивчення математики в старшій школі. Окремі елементи роботи - аналіз нулів функцій, застосування інтегральних формул, періодичність, властивості тригонометричних функцій, поведінка функцій на межі області можуть бути використані в факультативних курсах з математичного аналізу, олімпіадних задачах і підготовці до МАН, ілюстрації застосування інтегралу, гуртках з додаткової математичної підготовки. З позиції шкільного курсу математики результати роботи можна адаптувати для факультативної та олімпіадної підготовки учнів і студентів. Концепції періодичних функцій, інтегральних формул, поведінки функцій на межі та розкладу на елементарні дробі мають безпосередній зв'язок із вивченням інтегралів, тригонометрії, гармонічного аналізу та задач підвищеної складності. Це дозволяє розглядати окремі ідеї роботи як приклади застосування вищої математики у загальній середній освіті.

Такі приклади допомагають формувати математичну культуру учнів, демонструють прикладний і теоретичний зміст аналітичних методів, формують розуміння взаємозв'язку між різними розділами математики. Зокрема, рівняння типу згортки дозволяють показати, як шкільний інтеграл

переходить у складніший апарат інтегральних перетворень, а властивості періодичних функцій у глибокий аналіз аналітичності.

Вивчення інтегральних рівнянь у закладах фахової передвищої освіти є важливим елементом формування математичної компетентності здобувачів, оскільки такі рівняння є теоретичною основою багатьох прикладних дисциплін – фізики, інженерії, економіко-математичного моделювання, аналізу сигналів та систем. Хоча у стандартних навчальних програмах інтегральні рівняння зазвичай не розглядаються поглиблено, пропедевтика дозволяє поступово підвести студентів до розуміння цих об'єктів, опираючись на уже відомі елементи математичного аналізу.

Отримані результати мають важливі теоретичні значення для розвитку теорії аналітичних просторів у складних геометричних областях та можуть бути використані в математичній фізиці, теорії інформації та інших напрямках, де природно виникли операції згортки. Робота відкриває перспективу для подальших досліджень рівнянь згортки в областях із нестандартними межами, дослідження впливу розташування полюсів породжуючих функцій на характер, розв'язок та розширення класів функцій, для яких можна встановити аналогічні властивості.

Список використаних джерел

1. Винницький Б.В. Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичних у півсмузі. – Математичні студії. – 1995. – Т. 7, № 1. – С. 41–50.
2. Винницький Б.В. On zeros of functions analytic in a half plane and completeness of systems of exponents. – Український математичний журнал. – 1994. – Т. 46, № 5. – С. 492–497.
3. Дільний В.М. Асимптотичні та апроксимаційні властивості функцій експоненціального типу та їх застосування. – Дисертація на здобуття ступеня доктора фізико-математичних наук. – Львів, 2015.
4. Nikolskii N. Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading. – Mathematical Surveys and Monographs. – 2002.
5. Mashreghi J. Lectures on Analytic Function Spaces and Their Applications. – 2023.
6. Garcia S.R., Mashreghi J., Ross W.T. Finite Blaschke Products and Their Connections. – С. 309–331.
7. Дум'як Х. Про існування розв'язків рівняння згортки у півсмузі. – Матеріали XII-ї Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми сучасної науки». – За ред. Ю. Матуріна, І. Столярчука. – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка, 2025. – С. 175–177.
8. Дум'як Х., Дільний В. Про існування розв'язку рівняння згортки у півсмуговій області. – Математика, Інформатика, Фізика: Наука та Освіта. – Т. 2, № 2, 2025. – С. 198–205.
9. Edmunds D.E., Evans W.D. Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings. – Springer, 2004.
10. Dilnyi V., Huk K. Identification of Unknown Filter in a Half-Strip. – Acta Applicandae Mathematicae. – 2020.