

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

у формуванні іншомовної граматичної компетенції є важливою передумовою успішного спілкування іноземними мовами.

1. Выготский Л. С. *Собрание сочинений: в 6 т.* / Под ред. В. В. Давыдова / Выготский Л. С. – М.: Педагогика, 1982. – 504 с. – (Академия педагогических наук СССР) (Проблемы общей психологии; т. 1).

2. Гадамер Г. Г. *Истина і метод.* / Гадамер Г. Г.; пер. з нім. О. Мокровольського. – К.: Юніверс, 2000. – 459 с. – (Герменевтика 1: Основи філософської герменевтики; т. 1).

3. Гумбольдт В. *Язык и философия культуры.* / Гумбольдт В.; пер. с нем. яз. – М.: Прогресс, 1985. – 451 с.

4. Зимняя И. А. *Психология обучения иностранным языкам в школе.* / Зимняя И. А. – М.: Просвещение, 1991. – 220 с. – (Б-ка учителя иностр. яз.).

5. Кацнельсон С. Д. *Типология языка и речевого мышления.* / Кацнельсон С. Д. – Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1972. – 216 с. – (АН СССР. Ин-т языкознания).

6. Леонтьев А. А. *Психолингвистические*

единицы и порождение речевого высказывания. / Леонтьев А. А. – М.: Наука, 1969. – 307 с. – (АН СССР. Ин-т языкознания).

7. Пассов Е. И. *Коммуникативный метод обучения иноязычному говорению.* – 2-е изд. / Пассов Е. И. – М.: Просвещение, 1991. – 222 с. – (Б-ка учителя иностр. яз.).

8. Слобин Д. *Психолингвистика* / Д. Слобин, Дж. Грин; пер. с англ. Е. И. Негневицкой. – М.: Прогресс, 1976. – 350 с.

9. Ayoub C. *The Systematic Teaching of Grammar: A Critique.* – Intertext. A Student Publication of the Syracuse University Writing. – Режим доступу до статті: <http://www.wrt-intertext.syr.edu/VII/ayoub/html>

10. Funk and Wagnalls Desk Standard Dictionary of the English Language / Ed. by J. C. Fernald, L. H. D. – New York and London: Funk & Wagnalls Company, 1917.

11. Longman Dictionary of Contemporary English. – Barcelona: Longman Group Ltd., 2000.

12. Oxford Student's Dictionary of Current English / Ed. by A.S. Hornby. – Oxford: Oxford University Press / Moscow Prosveshcheniye Publishers, 1984.

Стаття надійшла до редакції 30.10.2008.

УДК 519.863

Ольга Овчар, вчитель математики вищої категорії СЗШ №67
м. Львова

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

У даній статті висвітлено питання розв'язування оптимізаційних задач при вивченні теми екстремуми функції.

Ключові слова: функція, геометричні тіла, математична модель, оптимізаційні задачі.

Постановка проблеми. На уроках математики потрібно виховувати не тільки звичку до логічного мислення, а і математичну інтуїцію, яка дозволяє передбачити кінцевий результат. У розв'язанні цієї проблеми значну роль відіграють творчі задачі, які в математиці є найбільш важливі, оскільки в них відсутній певний алгоритм розв'язання. Вони вимагають від учня нестандартного мислення, спонукають до самостійної роботи над книгою [4].

Одним з прикладів творчих задач є оптимізаційні задачі. Нерідко перед нами виникає завдання знайти найкраще оптимальне рішення завдання – найкращий результат. Це може бути завдання про найвищу продуктивність праці при наявному кадровому потенціалі, наявній техніці, сировині і т.д.

Розв'язування багатьох практичних задач зводиться до визначення умов, за яких досліджувана величина набуває свого найбільшого чи найменшого значення. Питання розв'язування задач на знаходження найбільших і найменших значень є одним з найцікавіших з теоретичного боку і в той же час має важливе практичне значення. Дуже важливо, наприклад, визначити, за яких умов на виготовлення якогось виробу витрачають найменше матеріалів, або з певної кількості матеріалу виготовляють найбільше деталей. Усі задачі на максимум і мінімум, незважаючи на їх різноманітність, за своїм змістом і методами розв'язування зводяться на знаходження умов, за яких деяка функція набуватиме найбільшого або найменшого значення.

Процес розв'язування таких задач включає в себе три взаємопов'язані між собою складові процеси: розуміння, формування гіпотези, апробація результатів.

Не слід захоплюватися розв'язанням однотипних задач. Адже, розв'язавши дві – три аналогічні задачі, учні механічно засвоюють спосіб їх розв'язування і далі роблять це механічно, не вникають навіть у зміст. Тому задачі бажано добирати і за характером даних залежностей і відношень, однаковою математичною структурою, але по суті зовсім різні.

При розв'язуванні екстремальних задач на вписані і описані стереометричні фігури особлива увага звертається на виконання малюнка [6], бо від цього значною мірою залежить успішне розв'язування задачі. Зображення виконується методом паралельного проектування, що є необхідною умовою його правильності [8]. Розв'язування екстремальних задач є одним з найцікавіших з теоретичного боку і в той же час має важливе практичне значення. У підручнику з геометрії для середньої школи включені задачі на геометричні екстремуми. Основний спосіб їх розв'язування – широке використання відображень, які є окремими видами функцій. При розв'язуванні екстремальних задач вчитель ставить перед собою мету виділити найважливіші типи їх розв'язування, розглянути доступні учням методи, розробити методику їх розв'язування.

Мета статті. Привернути увагу до розв'язування екстремальних задач на комбінації геометричних тіл, які сприяють розвитку просторових уявлень і навичок зображень при розв'язуванні задач на вписані й описані тіла.

Виклад основного матеріалу. При розв'язанні таких задач спочатку умову треба перекласти на мову математики. Створити математичну модель. Для створення математичної моделі можна використати таку послідовність:

1. За умовою задачі виділити величину, яку слід оптимізувати.
2. Вибрати зручну змінну, що може бути аргументом функції, яка описує досліджувану величину.
3. Знайти аналітичний вираз для функції.
4. За умовою задачі визначити проміжок, на якому розглядають отриману функцію.

Дану задачу зведено до знаходження найбільшого або найменшого значення функції на деякому проміжку. За допомогою похідної або іншими засобами розв'язують отриману задачу. Після цього з'ясовується, який реальний зміст має результат, отриманий у термінах функцій [1].

Приклад 1. Потрібно виготовити закритий циліндричний бак об'ємом 250π см³. Якими повинні бути його розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу? [7]

Побудуємо математичну модель. Умову задачі переформулюємо так: знайти розміри прямого кругового циліндра із об'ємом 250π см³, що має найменшу площу поверхні. Величина, яку потрібно оптимізувати, є площа повної поверхні циліндра. Площа повної поверхні циліндра залежить від радіуса основи та висоти циліндра. Отже, визначити радіус основи R і висоту H циліндра так, щоб при заданому об'ємі площа його поверхні була найменшою $S=2\pi RH+2\pi R^2$. Найменше значення цієї функції і потрібно обчислити.

$V=\pi R^2 H=250\pi$. $H=(250\pi)/(\pi R^2)=250/R^2$, тоді $S=(500\pi)/R+2\pi R^2$. Отже, математичною моделлю даного завдання є задача: знайти найменше значення функції $S=(500\pi)/R+2\pi R^2$.

1. Область визначення $R>0$.
2. Знаходимо похідну: $S'=(-500\pi)/R^2+4\pi R$.
3. Знайдемо критичні точки: $(-500\pi)/R^2+4\pi R=0$, $4\pi R^3=500\pi$, $R^3=125$, $R=5$.
4. Знаходимо другу похідну: $S''=1000\pi/R^3+4\pi$.
5. $S''(5)>0$, то при $R=5$ функція досягає мінімуму, який і є найменшим значенням функції S . Тоді $H=250/R^2$, $H=10$ см.

Приклад 2. Потрібно виготовити ящик з кришкою, сторони основи якого відносяться як один до двох, а площа повної поверхні 108π см². Якими повинні бути його розміри, щоб його об'єм був найбільшим? [7]

За умовою: $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$, звідки $a=x$, $b=2x$. $V=a\cdot b\cdot H$, $V=2x^2\cdot H$. Потрібно виключити змінну H . $S=108\pi$ см², $S=2S_{\text{осн.}}+S_{\text{біч.}}$; $S_{\text{біч.}}=\pi H$. $S=4x^2+6xH$; $4x^2+6xH=108$.

$$H=(108-4x^2)/(6x)=\frac{18}{x}-\frac{2x}{3}. V=2x^2(\frac{18}{x}-\frac{2x}{3})=36x-\frac{4x^3}{3}.$$

Дослідимо дану функцію за допомогою похідної:

1. Областю визначення функції V є додатні значення x , тобто $x>0$.
2. Знаходимо похідну: $V'=36-4x^2$, при $V'=0$, $x=3$.
3. Знаходимо другу похідну: $V''=-8x$; $V''(3)<0$, тобто при $x=3$ функція має максимум, який і буде найбільшим значенням функції. Тоді: $H=4$ см.

Відповідь. Об'єм ящика є найбільшим, якщо сторони його мають довжину 3 см і 6 см, а висота рівна 4 см.

Приклад 3. Треба виготовити ящик з кришкою, об'єм якого 288 см^3 , а сторони основи відносяться як 1:3. Які мають бути розміри ящика, щоб його площа повної поверхні була найменшою? У відповіді записати значення найменшої площі повної поверхні (у см^2) [5].

За умовою: $a/b=1/3$, звідки $a=x$, $b=3x$.
 $V=3x^2 \cdot H=288 \text{ см}^3$, $H=288/(3x^2)$. Потрібно виключити змінну H , $S=2S_{\text{осн.}}+S_{\text{біч.}}$; $S_{\text{біч.}}=P_{\text{осн.}} \cdot H$.
 $S=6x^2+8xH=6x^2+(288 \cdot 8x)/(3x^2)=6x^2+768/x$.
 $S=6x^2+768/x$.

Дослідимо дану функцію за допомогою похідної:

1. Областю визначення функції S є додатні значення x , тобто $x>0$.

2. Знаходимо похідну: $S'=12x-768/x^2$, при $S'=0$, $x=4$.

3. Знаходимо другу похідну: $S''=12+1536/x^3$; $S''(4)>0$, тобто при $x=4$ функція має мінімум, який і буде найменшим значенням функції. Тоді: $H=6 \text{ см}$.
 $S=6x^2+768/x=6 \cdot 16+768/4=96+192=288 \text{ см}^2$

Відповідь. 288 см^2 .

Приклад 4. Число 20 розбити на два доданки так, щоб сума їхніх кубів була найменшою. Визначити добуток цих доданків [5].

Нехай один з доданків дорівнює x , тоді другий доданок буде $-(20-x)$. Сума кубів цих доданків дорівнює:

$$S=x^3+(20-x)^3=60x^2-1200x+8000.$$

$$S=60x^2-1200x+8000.$$

Найменше значення цієї функції і потрібно визначити.

1. Областю визначення функції є $\mathbb{R}$.

2. Знаходимо похідну: $S'=120x-1200$, при $S'=0$, $120x=1200$, $x=10$.

3. Знаходимо другу похідну: $S''=120$, $S''(10)>0$, тобто при $x=10$ функція S має мінімум, який і є найменшим значенням функції.

Відповідь. 100

Приклад 5. Закон прямолінійного руху тіла заданий рівнянням:

$$S=-t^3+9t^2-24t-8. S - \text{в метрах, } t - \text{в секундах.}$$

Знайти максимальну швидкість руху тіла [7].

Швидкість руху тіла в даний момент часу дорівнює похідній шляху S .

$$V(t)=S'=-3t^2+18t-24.$$

Досліджуємо цю функцію на екстремум за допомогою другої похідної: $V''(t)=-6t+18$, $V''(t)=0$, $t=3 \text{ с}$, $V''(t)=-6$.

Друга похідна від'ємна; звідси слідує, що швидкість є найбільшою при $t=3 \text{ с}$. Максимальна швидкість руху дорівнює: $V(3)=3 \text{ м/с}$.

Приклад 6. Визначити додатне число, для якого різниця куба і потроєного квадрата цього числа є найменшою [5].

Нехай невідоме число – x . Тоді $y=x^3-3x^2$.

1. Областю визначення функції y є додатні значення x , тобто $x>0$.

2. Знаходимо похідну: $y'=3x^2-6x$, при $y'=0$, $x_1=0$ – не задовольняє умови, $x_2=2$.

3. Знаходимо другу похідну: $S''=6x-6$, $S''(2)>0$, тобто при $x=2$ функція S має мінімум, який і є найменшим значенням функції.

Приклад 7. Серед усіх рівнобедрених трикутників з бічною стороною 5 визначити трикутник з найбільшою площею. Обчислити площу цього трикутника.

За властивістю медіани, висоти та бісектриси рівнобедреного трикутника $BK=KC$, $AK \perp BC$. Нехай $BK=x \text{ см}$, тоді за теоремою Піфагора

$$AK=\sqrt{25-x^2}.$$

$$S=\frac{1}{2} AK \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{25-x^2} = x \sqrt{25-x^2}.$$

1. Областю визначення функції S є додатні значення x , $x>0$, але $25-x^2>0$;

$$x \in [-5; 5], \text{ тобто } x \in (0; 5]$$

2. Знайдемо похідну

$$S' = \sqrt{25-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = \frac{25-2x^2}{\sqrt{25-x^2}}$$

$25-2x^2=0$; $x^2=12,5$; $x_1=\sqrt{12,5}$; $x_2=-\sqrt{12,5}$ – не задовольняє умови.

3. Знайдемо другу похідну

$$S'' = \frac{-4x\sqrt{25-x^2} - (25-x^2) \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{25-x^2}}}{25-x^2} =$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{25-x^2}}; S''<0, \text{ тобто при } x=\sqrt{12,5}, \text{ функція}$$

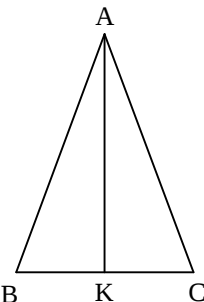
S має максимум.

$$S = x \sqrt{25-x^2} = \sqrt{12,5} \cdot \sqrt{12,5} = 12,5 \text{ кв.од.}$$

Приклад 8. Визначити три числа, добуток яких буде найбільшим, якщо сума цих чисел дорівнює 54 і перше число більше за друге у 8 разів. У відповіді записати найбільше з цих чисел [5].

Нехай друге число буде x , тоді перше число – $8x$, а третє – $(54-9x)$.

$$y=8x \cdot x \cdot (54-9x)=432x^2-72x^3.$$



1. Областю визначення функції є $\mathbb{R}$.
2. Знаходимо похідну: $y' = 864x - 216x^2$. $864x - 216x^2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.
3. Знайдемо другу похідну: $y'' = 864 - 432x$, $y''(4) < 0$, тобто при $x = 4$ функція y набуває максимуму. Друге число – 4, перше – 32, третє – 18. Відповідь. 32.

Приклад 9. Знайти суму координат точки, яка лежить на прямій $y = -7x + 2$, якщо різниця квадратів абсциси й ординати точки є найбільшою [5].

Нехай x – абсциса точки, $y = -7x + 2$ – ордината точки.

$$f(x) = x^2 - (-7x + 2)^2 = -48x^2 + 28x - 4$$

1. Областю визначення функції $x \in \mathbb{R}$.

$$2. \text{ Знаходимо похідну: } f'(x) = -96x + 28, x = \frac{7}{24}.$$

3. Знайдемо другу похідну: $f''(x) = -96 < 0$, отже функція $f(x)$ має максимум в точці $x = \frac{7}{24}$.

$$y\left(\frac{7}{24}\right) = -7 \cdot \frac{7}{24} + 2 = -\frac{1}{24}. \quad x + y = \frac{7}{24} - \frac{1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Відповідь. $\frac{1}{4}$.

Приклад 10. Визначити значення параметра a , при якому сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 2ax - a - 2 = 0$ буде найменшою [5].

$x^2 - 2ax - (a + 2) = 0$. Використаємо формулу квадрат суми: $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, звідси $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = 2a$, $x_1x_2 = -(a + 2)$.

$$y = x_1^2 + x_2^2 = 4a^2 + 2(a + 2) = 4a^2 + 2a + 4$$

1. Областю визначення функції $x \in \mathbb{R}$.

$$2. \text{ Знаходимо похідну: } y' = 8a + 2, a = -\frac{1}{4}.$$

3. Знайдемо другу похідну: $y'' = 8 > 0$, функція $y(a)$ має мінімум в точці $a = -\frac{1}{4}$.

Відповідь. $a = -\frac{1}{4}$.

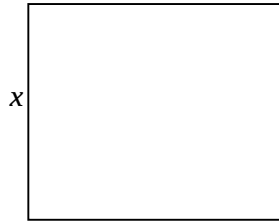
Приклад 11. Прямокутну ділянку землі треба обгородити сіткою так, щоб її площа дорівнювала 400 м^2 і на огорожу пішло найменше погонних метрів сітки. Обчислити периметр такої ділянки (у м) [5].

Нехай одна сторона прямокутної ділянки – x м,

тоді друга сторона – $\frac{400}{x}$ м.

$$P = 2\left(x + \frac{400}{x}\right) = 2x + \frac{800}{x}$$

$$\frac{400}{x}$$



1. Областю визначення функції $x \in \mathbb{R}_+$.

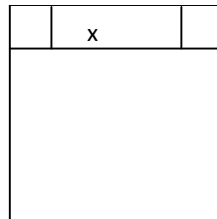
$$2. \text{ Знаходимо похідну: } P' = \frac{4x^2 - (2x^2 + 800)}{x^2} = \frac{2x^2 - 800}{x^2}, x_1 = 20, x_2 = -20 - \text{не задов. умови.}$$

$$3. \text{ Знайдемо другу похідну } P'' = \left(2 - \frac{800}{x^2}\right)' = \frac{1600}{x^3}.$$

$P''(20) > 0$, отже функція $P(x)$ в точці $x = 20$ має мінімум. $P(20) = 40 + 40 = 80$ м.

Відповідь. 80 м.

Приклад 12. З квадратного листа картону зі стороною 24 см вирізають по кутах однакові квадрати і роблять відкриту коробку. Яка має бути (у см) сторона вирізаних квадратів, щоб об'єм коробки був найбільшим? [5]



Нехай довжина основи коробки – x см,

тоді висота – $\frac{24-x}{2}$ см.

$$V = x^2 \cdot \frac{24-x}{2} = 12x^2 - \frac{1}{2}x^3.$$

1. Областю визначення функції є додатні значення, $x > 0$.

$$2. \text{ Знаходимо похідну функції: } V' = 24x - \frac{3}{2}x^2.$$

$x_1 = 0$ – не задовільняє умови, $x_2 = 16$.

3. Знайдемо другу похідну: $V'' = 24 - 3x$. $V''(16) < 0$, функція має максимум в даній точці.

Отже, довжина основи коробки 16 см. Сторона вирізаних квадратів – 4 см.

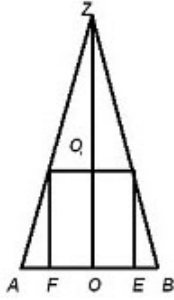
Відповідь. 4 см.

Приклад 13. Відома висота конуса H і кут нахилу твірної до площини основи α . Знайти, який максимальний об'єм може мати вписаний в нього циліндр.

Розв'язання: $ZO = H$, $\angle ZAO = \alpha$.

Введемо в циліндр будь-який лінійний елемент. Нехай, наприклад $FO = r$. Тоді $ZO_1 = r \operatorname{tg} \alpha$, $V_{\text{ц}} = \pi r^2 (H - r \operatorname{tg} \alpha)$.

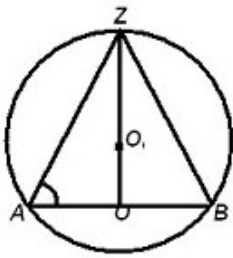
Розглянемо функцію $y = r^2 H - r^3 \operatorname{tg} \alpha$. Очевидно, що $V_{\text{ц}}$ приймає максимальне значення при тому ж значенні r , при якому $y = y_{\text{max}}$. Знаходимо похідну: $y' = 2rH - 3r^2 \operatorname{tg} \alpha$, $2rH - 3r^2 \operatorname{tg} \alpha = 0$. Оскільки за умовою



задачі $r \neq 0$, то $r = \frac{2}{3} H \operatorname{ctg} \alpha$.

Очевидно, що при знайденому значенні r функція $y(r)$ приймає максимальне значення і $V_{\text{ц}} = V_{\text{цmax}}$. Отже, $V_{\text{цmax}} = \frac{4p}{27} H^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

Приклад 14. Визначити, яку максимальну повну поверхню може мати конус, вписаний в кулю, площа сфери якої рівна Q .



Мал. 2

Розв'язання: Розглянемо $\angle ZAO$ (мал. 2), нехай $\angle ZAO = \alpha$ ($0 < \alpha < \pi/2$); нехай радіус кулі рівний R , тобто $ZO_1 = R$. Тоді $AZ = 2R \sin \alpha$ і $AO = R \sin 2\alpha$ і $S_{\text{кон.}} = \pi R^2 \sin 2\alpha (\sin 2\alpha + 2 \sin \alpha) = 4\pi R^2 \sin 2\alpha \sin \alpha \cos^2 \frac{a}{2}$.

Так як $Q = 4\pi R^2$, то $S_{\text{кон.}} = Q \sin 2\alpha \sin \alpha \cos^2 \frac{a}{2}$.

Визначимо тепер $S_{\text{кmax}}$. Розглянемо функцію

$y = \sin 2\alpha \sin \alpha \cos^2 \frac{a}{2}$ і знайдемо її похідну

$$y' = 2 \sin \alpha \cos^2 \frac{a}{2} (\cos 2\alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin^2 \frac{a}{2}) =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos^2 \frac{a}{2} (4 \cos^2 \alpha - \cos \alpha - 1).$$

Так як ті значення α , при яких $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ рівні нулю, не розглядаються в даній задачі, то розв'яжемо рівняння $4 \cos^2 \alpha - \cos \alpha - 1 = 0$,

звідси $\cos \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$ і $\alpha_1 = \arccos \frac{1+\sqrt{17}}{8}$ (від'ємний корінь рівняння для даної задачі є стороннім).

Оскільки $\cos \alpha$ – спадна функція на проміжку допустимих в даній задачі значень α , то при переході α через точку α_1 (від менших значень до більших) $\cos \alpha$ змінює значення, більші, ніж

$\frac{1+\sqrt{17}}{8}$, на менші. При цьому квадратний тричлен,

що стоїть в лівій частині рівняння (3), міняє, свої значення з позитивних на негативні. А це означає, що функція (2) в точці α_1 має максимум. Обчислимо його. Запишемо вираз для y в дещо іншому вигляді

$$y = \sin 2\alpha \sin \alpha \cos^2 \frac{a}{2} = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \cos \alpha \sin^2 \alpha.$$

Тоді

$$\sin^2 \alpha_1 = 1 - \cos^2 \alpha_1 = \frac{23 - \sqrt{17}}{32}.$$

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{9 + \sqrt{17}}{8}.$$

$$y_{\text{max}} = \frac{9 + \sqrt{17}}{8} \cdot \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \cdot \frac{23 - \sqrt{17}}{32} = \frac{107 - 51\sqrt{17}}{512}.$$

Отже, $S_{\text{кmax}} = \frac{107 - 51\sqrt{17}}{512} Q$.

Приклад 15. Визначити, яким може бути мінімальний об'єм конуса, описаного навколо кулі, об'єм якої рівний Q .

Розв'язок: Нехай $OO_1 = R$ (мал. 3). Нехай $\angle ZBO = \alpha$. Тоді

$$OB = R \operatorname{ctg} \frac{a}{2}, ZO = R \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \text{ і}$$



Мал. 3

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Оскільки $V_{\text{кулі}} = Q = \frac{4}{3} \pi R^3$, то

$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{4} Q \operatorname{ctg}^3 \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Розглянемо функцію

$y = \operatorname{ctg}^3 \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$ і знайдемо її мінімум:

$$y' = 3 \operatorname{ctg}^3 \frac{a}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{a}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha +$$

$$\operatorname{ctg}^3 \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{a}{2}}{\cos \alpha} \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin^2 \frac{a}{2}} + \frac{\operatorname{ctg} \frac{a}{2}}{\cos \alpha}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}^3 \frac{a}{2}}{\cos \alpha} \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 3\right)$$

Враховуючи, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, знаходимо

критичну точку $\alpha_1 = \arccos \frac{1}{3}$. При переході α через критичну точку α_1 похідна y' , як неважко помітити, змінює знак з “-” на “+”. Отже, функція (4) в точці α_1 приймає мінімальне значення.

$$\text{Обчислимо } y_{\min}: \operatorname{tg} \alpha_1 = 2\sqrt{2}; \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha_1}{2} = 2\sqrt{2};$$

$$y_{\min} = 8. \text{ Таким чином, } V_{k\min} = 2Q.$$

Приклад 16. В кулю радіусу R вписана правильна n -кутна піраміда, що має найбільший об'єм. Визначити двограний кут при ребрі основи піраміди.



Мал. 4

Розв'язання: Нехай $\angle ZEO$ – лінійний кут шуканого двогранного кута (мал. 4). Покладемо $\angle ZEO = \varphi$ і $\angle ZAO = \alpha$. Тоді $ZA = 2R \sin \alpha$, $ZO = 2R \sin^2 \alpha$, $AO = R \sin 2\alpha$;

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} \cdot n \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin^2 2\alpha \sin \frac{2\pi}{n} \cdot 2R \sin^2 \alpha =$$

$$= \frac{n}{3} R^3 \sin \frac{2\pi}{n} \sin^2 2\alpha \sin^2 \alpha.$$

Розглянемо функцію

$$y = \sin 2\alpha \sin \alpha,$$

$$y' = 2 \cos 2\alpha \sin \alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha (3 \cos^2 \alpha - 1).$$

$$\text{Неважко показати, що при } \alpha_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

функція приймає максимальне значення. Визначимо тепер φ :

$$OE = OA \cos \frac{\pi}{n} = R \sin 2\alpha_1 \cos \frac{\pi}{n},$$

$$\operatorname{tg} j = \frac{2R \sin^2 \alpha_1}{R \sin 2\alpha_1 \cos \frac{\pi}{n}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\cos \frac{\pi}{n}}.$$

$$\text{З рівності } \cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ знаходимо, що } \operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{2}.$$

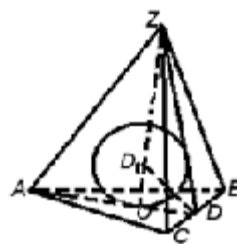
$$\text{Отже, } \operatorname{tg} j = \frac{\sqrt{2}}{\cos \frac{\pi}{n}}, \quad j = \arctg \frac{\sqrt{2}}{\cos \frac{\pi}{n}}.$$

Приклад 17. Навколо кулі радіуса R описана правильна трикутна піраміда, яка

Молодь і ринок №1 (48), 2009

має мінімальну бічну поверхню. Визначити кут нахилу бічного ребра піраміди до площини її основи.

Нехай $\angle ZDO$ – лінійний кут двогранного кута при ребрі основи піраміди (мал. 5). Відомо, що центр кулі, вписаної в правильну піраміду, лежить на висоті піраміди, куля дотикається до основи піраміди в її центрі, а до бічних граней – в точках, які знаходяться на апофемах піраміди.



Мал. 5

Покладемо $\angle ZDO = \alpha$ і

$$\angle ZAO = \varphi. \text{ Тоді } OD = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

$$AD = 3R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$CD = R\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2};$$

$$S_{\triangle ABC} = 3R^2 \sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$S_{\text{б.пір}} = 3R^2 \sqrt{3} \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

$$\text{Розглянемо функцію } y = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha},$$

$$y' = \frac{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right) \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \cos \alpha \right).$$

Оскільки по змісту задачі $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, то критичні значення α ми знайдемо з рівняння

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha - \cos \alpha = 0, \quad \text{розв'язуючи яке}$$

знаходимо, що $\cos \alpha_1 = \sqrt{2} - 1$ і $\alpha_1 =$

$\arccos(\sqrt{2} - 1)$. Неважко показати, що при $\alpha = \alpha_1$ функція (6) приймає мінімальне значення.

