

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»
Завідувач кафедри математики та економіки,
кандидат педагогічних наук, доцент
_____ Тарас ВІЙЧУК
«_____» _____ 2025 р.

**Асимптотика співвідношень типу Бореля для
подвійних рядів Діріхле**

Спеціальність 111 Математика

Магістерська робота
на здобуття кваліфікації
Магістр математики.

Автор роботи:
ГОРБАЧЕВ Ігор Петрович

підпис

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук, доцент
ГАЛЬ Юрій Михайлович

підпис

Дрогобич, 2025

Захист кваліфікаційної роботи

Асимптотика співвідношень типу Бореля для подвійних рядів Діріхле

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

_____	Голова ЕК	_____	_____
Дата		підпис	прізвище, ім'я

Секретар ЕК	_____	_____
	підпис	прізвище, ім'я

АНОТАЦІЯ

Встановлену найкращу точну оцінку величину виняткової множини, поза якою виконуються співвідношення Бореля для подвійних рядів Діріхле.

ANNOTATION

The best exact estimate of the size of exceptional set outside which the Borel relation for double Dirichlet series holds has been established.

ЗМІСТ

1.Вступ.....	5
2. Доведення основних результатів	9
3. Висновки.....	18
4. Список використаних джерел	19

1. Вступ

Нехай $S^2(\lambda)$ — клас цілих функцій $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^2$, зображуваних абсолютно збіжним для всіх $z \in \mathbb{C}^2$ кратними рядами Діріхле:

$$F(Z) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} F_n e^{<Z, \lambda_n>}, \quad z = \sigma + i\tau, \quad (1.1)$$

з невід'ємною зростаючою послідовністю показників λ_n , для яких при $\sigma \in \mathbb{R}^2$ і $F \in S^2(\lambda)$:

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}^2\}, \quad \mu(\sigma, F) = \max\{|F_n| e^{<\sigma, \lambda_n>} : n \in \mathbb{Z}_+^2\}$$

$\|n\| = n_1 + n_2$ – висота, $< z, \lambda_n >$ – скалярний добуток.

Метою даної роботи є встановлення найкращої точної оцінки величини виняткової множини у співвідношенні Бореля

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F), \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

в класі $S^2(\lambda)$ за умови:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \lambda_n^{(j)}} < +\infty \quad (1.3)$$

Нехай

- $n_j(t) = \sum_{\lambda_k^{(j)} \leq t} 1$ – лічильна функція послідовності j -их компонент
- $n_\lambda(a, b] = \sum_{a \leq \|\lambda\| \leq b, F_n \neq 0} 1$,
- $\nu(E)$ – ν -міра ν -вимірної множини $E \in \mathbb{R}_+^p$, тобто $\nu(E) = \int_{\mathbb{R}_+^p \cap E} \nu(dx)$,
- $\nu[a, b] = \nu(\{x \in \mathbb{R}_+^p : a \leq \|x\| \leq b\})$,
- $\text{supp } \nu$ – носій міри ν ,
- $\text{meas}_p(E)$ – Лебегова міра в $\mathbb{R}^p$ вимірної за Лебегом множини $E \in \mathbb{R}^p$.

Відзначимо, що в [2] узагальнено результат з [1] на клас $S^2(\lambda)$, $p \geq 2$. Зокрема доведено: для того, щоб для кожної функції $F \in S^p(\lambda)$ співвідношення

(1.3) виконувалось при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$), де K – довільний конус в $\mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат, такий, що

$$\overline{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(\mu) = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^p : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \mu(t\sigma, F) = +\infty \right\},$$

а $E \subset \mathbb{R}^p$ – локально вимірна множина така, що для її міри Лебега:

$$\text{meas}_p(E \cap C(R)) = O(R^{p-1}), \quad (R \rightarrow +\infty) \quad (1.4)$$

необхідно і досить, щоб (1.2) виконувалася для кожного $1 \leq j \leq p$;

$C(R)$ – необмежений циліндр в $\mathbb{R}^p$, який є образом циліндра $C'(R) = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_2^2 + \dots + x_p^2 \leq R^2\}$ при повороті системи координат навколо початку, при якому додатна піввісь O_{x_1} переходить у промінь

$$\{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) : \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_p > 0\}$$

Зауважимо, що із (1.4) для $p = 2$ і кожної додатної зростаючої функції $\psi(t)$ такої, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty$$

виконується

$$\int_E \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{\psi(|\sigma|)} < +\infty \quad (1.5)$$

Справді, для $g > 0$ нехай

$$E_g = \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : \sigma \in E, |\sigma| = g\}. \text{ Тод за умовою (1.4)}$$

$$\text{meas} (E \cap K_2(R)) = O(R),$$

де $K_2(R) = \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : |\sigma| \leq R\}$, звідси, для функції $\varphi(g) = g \int_{E_g} d\varphi$

маємо при $R \rightarrow +\infty$

$$\int_0^R \varphi(g) dg = \int_0^R \left(\int_g d\varphi \right) g dg = \int_{E \cap K_2(R)} d\sigma_1 d\sigma_2 = O(R)$$

Отже, при $R \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \int_{E \cap K_2(R)} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{\Psi(|\sigma|)} &= \int_0^R \frac{1}{\psi(g)} \left(g \int_{E_g} d\varphi \right) dg = \frac{1}{\Psi(R)} \int_0^R \varphi(g) dg + \\ &+ \int_0^R \{(\varphi(g))\}^{-2} \int_0^g \varphi(x) dx d\psi(g) \leq O(1) + O(1) \int_0^R \frac{g d\psi(g)}{(\psi(g))^2} \end{aligned}$$

при цьому ми скористалися співвідношенням $R = O(\psi(R))$, $R \rightarrow +\infty$.

Залишається зауважити, що

$$\int_0^R \frac{g d\psi(g)}{(\psi(g))^2} = -\frac{g}{\psi(g)} I_0^R + \int_0^R \frac{dg}{\psi(g)} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dg}{\psi(g)} < +\infty$$

Тому (1.5) справджується.

Із (1.5), зокрема, для кожного $\xi > 0$

$$\int_{E \setminus \overline{K_2(1)}} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|^{1+\xi}} < +\infty$$

Таким чином, у сформульованому вище твердженні стосовно співвідношення Бореля у випадку $p = 2$ оцінку (1.4) величини виняткової можна замінити оцінкою

$$\int_{E \setminus \overline{K_2}(1)} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} < +\infty$$

при цьому випливає, що існують послідовність $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)})$, для якої при $j = 1$ і $j = 2$ виконується умова (1.3), функція $F \in S^2(\lambda)$ стала $d > 0$ і вимірна множина $E \in \mathbb{R}_+^p$ такі, що для кожного $\varepsilon > 0$

$$\int_{E \setminus K_2(1)} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{(|\sigma|^{1-\varepsilon})} = +\infty,$$

і для всіх $\sigma \in E$

$$\ln M(\sigma, F) \geq (1 + d) \ln \mu(\sigma, F),$$

тобто у нашій роботі знайдено найкращу в описаному сенсі оцінку при $p = 2$ величини виняткової множини у співвідношенні Бореля.

Об'єктом дослідження є цілі функції, подвійні ряди Діріхле, виняткові множини поза межами виконуються асимптотичні оцінки.

Предметом дослідження є встановлення асимптотичних оцінок для подвійних рядів Діріхле та опис властивостей виняткових множин для співвідношення Бореля.

У роботі використовувались методи теорії функцій та функціонального аналізу.

2. Доведення основних результатів

Для $F \in S^P(\lambda)$ і $\sigma \in \mathbb{R}^p$ позначимо через

$$n(t, \sigma, F) = \sum_{\langle \lambda_n, \sigma \rangle \leq |\sigma|t} 1$$

лічильну функцію членів послідовності $\langle \lambda_n, \frac{\sigma}{\sigma_n} \rangle$ таких, що $F_n \neq 0$, а

$$Y_+(F) \equiv \{\sigma \in \mathbb{R}^+: (\forall t > 0)[n(t, \sigma, F) < +\infty]\},$$

$$Y_1(F) \equiv \{\sigma \in Y_+(F) : \int^{+\infty} \frac{\ln n(t, \sigma, F)}{t^2} dt < +\infty\}$$

Відзначимо, що $Y_+(F)$ і $Y_1(F)$ є конусами в $\mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат.

Нехай

$$n_j(t) = \sum_{\lambda_k^{(j)} \leq t} 1$$

- лічильна функція послідовності j -тих компонентів векторної послідовності $\lambda = (\lambda_n)$. Відомо [1], що умова (1.3) виконується тоді і лише тоді, коли

$$\int^{+\infty} \frac{\ln n_j}{t^2} dt < +\infty$$

а для $\sigma \in R_+^p = \{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p), \sigma_j > 0 (1 \leq j \leq p)\}$

$$n(t, \sigma, F) \leq n_1\left(\frac{|\sigma|}{\sigma_1} t\right) n_2\left(\frac{|\sigma|}{\sigma_2} t\right) \dots n_p\left(\frac{|\sigma|}{\sigma_p} t\right),$$

по із справедливості умови (1.3) для $1 \leq j \leq p$ випливає, що

$$R_+^p \subset \gamma_1(F)$$

Крім цього [3], $\sigma \in \gamma(\mu)$ тоді і лише тоді, коли $\sup\{\langle \sigma, \lambda_n \rangle : n \in \mathbb{Z}_+^p\} = +\infty$, тобто $R_+^p \subset \gamma(\mu)$.

У випадку ж, коли – не зводиться до експоненційного многочлена, очевидно, що з умови $\sigma \in \gamma(F)$ випливає $\sup\{\langle \sigma, \lambda_n \rangle : n \in \mathbb{Z}_+^p\} = +\infty$, тобто $\sigma \in \gamma(\mu)$, і отже

$$R_+^p \subset \gamma_1(F) \subset \gamma(\mu).$$

Власне, перехід до “меншого” конуса $\gamma_1(F)$ дає змогу уточнити оцінку виняткової множини, отриману в [2]. Наскільки такий перехід до “меншого”

конуса, на якому виконується бажане асимптотичне співвідношення, є по-суті, нам не відомий.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 2.1 Нехай $F \in S^2(\lambda)$. Співвідношення (1.2) є правильним при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in K_1 \setminus E$), де K_1 довільний конус (кут) з вершиною у початку координат такий, що $\overline{K_1} \setminus \{O\} \subset \gamma_1(F)$, а множина E така, що

$$\int_{E \cap K_1} \int \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} < +\infty.$$

Доведення теореми 2.1 Без обмеження загальності вважаємо, що $F \in S_+^2(\lambda)$, $F(0)=1$ і не зводиться до експоненційного многочлена. У подальших міркуваннях використовуємо відомі нерівності Чебишова та Маркова.

При фіксованому σ , $e_0 = \sigma/|\sigma|$ розглянемо функцію $g(t) = g(t, e_0) = \ln F(te_0)$, $t \in \mathbb{R}_+$ і на ймовірному просторі $\mathbb{R}_+^2$ з мірою

$$P(dx) = \frac{1}{F(\sigma)} e^{\langle \sigma, x \rangle} \nu(dx), \quad x = (x_1, x_2),$$

де міра $\nu(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n(G)$, $\delta_n(G) = F_n$, якщо $\lambda_n \in G$ і $\delta_n(G) = 0$, якщо $\lambda_n \notin G$ для кожної обмеженої множини $G \subset \mathbb{R}_+^2$, випадкову величину $\xi = \langle e_0, x \rangle$. Позаяк $F(\sigma) = \int \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{\langle \sigma, x \rangle} \nu(dx)$, то при $\sigma = te_0$ маємо, що математичне сподівання ξ

$$M\xi = \int \int_{\mathbb{R}_+^2} \xi P(dx) = \frac{1}{F(\sigma)} \int \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle e_0, x \rangle e^{\langle \sigma, x \rangle} \nu(dx) = g'(t),$$

Потрібно при $\sigma = te_0$ для дисперсії

$$\begin{aligned}
D\xi &= M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int \int_{\mathbb{R}_+^2} \xi^2 P(dx) - (M\xi)^2 = \\
&= \frac{1}{F(\sigma)} \int \int_{\mathbb{R}_+^2} (\langle e_0, x \rangle)^2 e^{t\langle e_0, x \rangle} \nu(dx) - (g'(t))^2 = \\
&= \frac{\frac{d^2}{dt^2} F(te_0)}{F(te_0)} - \frac{\left(\frac{d}{dt} F(te_0) \right)^2}{(F(te_0))^2} = g''(t).
\end{aligned}$$

Враховуюючи, що при фіксованому e_0 функція $g(t)$ – опукла на $(0, +\infty)$ і, отже для кожного $t > 0$ при фіксованому e_0 отримуємо

$$g'(t) \geq \frac{\ln F(te_0) - \ln F(0)}{t} = \frac{\ln F(te_0)}{t}. \quad (2.1)$$

Застосовуючи нерівність Маркова $P\{\xi > a\} \leq \frac{M\xi}{a}, a > 0$, отримуємо при $a = 2g'(t)$ та $\sigma = te_0$

$$\begin{aligned}
F(\sigma) &= \sum_{\langle \lambda_n, e_0 \rangle \leq 2g(t)} F e^{\langle \sigma, \lambda_n \rangle} + F(\sigma) \int \int_{\langle x, e_0 \rangle > 2g(t)} P(dx) = \\
&= \sum_{\langle \lambda_n, e_0 \rangle \leq 2g(t)} F e^{\langle \sigma, \lambda_n \rangle} + F(\sigma) P\{\xi > 2g'(t)\} \leq \\
&\leq \sum_{\langle \lambda_n, e_0 \rangle \leq 2g(t)} F e^{\langle \sigma, \lambda_n \rangle} + \frac{1}{2} F(\sigma).
\end{aligned}$$

Звідси,

$$F(\sigma) \leq 2 \sum_{\langle \lambda_n, e_0 \rangle \leq 2g(t)} F e^{\langle \sigma, \lambda_n \rangle} \leq 2\mu(\sigma, F) n(2g'(t), \sigma, F). \quad (2.2)$$

Помітимо, що конус $\gamma_1(F) \subset \mathbb{R}^2$ насправді є кутом з вершиною у початку координат. Справді, якщо $(\sigma_1, \sigma_2) \in \gamma_1(F)$ при $\sigma_2 \geq \sigma_1$, то $\sigma_2 > 0$ і $\langle \lambda_n, \sigma \rangle = \lambda_{n_1}^{(1)} \sigma_1 + \lambda_{n_2}^{(2)} \sigma_2 \leq \sigma_1 \lambda_{n_1}^{(1)} + \sigma_2 \lambda_{n_2}^{(2)}$, тобто $n(t, \sigma, F) \geq n(t, \bar{\sigma}, F)$ при $\bar{\sigma} = (\sigma_2, \sigma_2)$ і промінь $l_+ = \{x = (x_1, x_2): x_1 = x_2 > 0\} \subset \gamma_1(F)$. Якщо ж $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \gamma_1(F)$

і $\sigma_1 \geq \sigma_2$, то також $l_+ \subset \gamma_1(F)$. Подібно встановлюємо, що з того, що $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \gamma_1(F)$ випливає, що кожен промінь, який виходить з початку координат і лежить між променем l_+ та променем $l_1 = \{x = (x_1, x_2): \sigma_2 x_1 = \sigma_1 x_2, x_2 > 0\}$ у випадку $\sigma_2 > \sigma_1$ і променями l_+ та $l_2 = \{x = (x_1, x_2): \sigma_2 x_1 = \sigma_1 x_2, x_1 > 0\}$ у випадку $\sigma_1 < \sigma_2$ належить до $\gamma_1(F)$.

Крім цього, очевидно, що $l_{\sigma_1} = \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2): \sigma_2 = 0, \sigma_1 < 0\}$ і $l_{\sigma_2} = \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2): \sigma_1 = 0, \sigma_2 < 0\}$, а разом з ними і квадрант $\{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2): \sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0\}$ не належать до $\gamma_+(F)$, а, отже, не належать і до $\gamma_1(F)$.

Нехай тепер $e_0^{(1)} = (\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)})$ і $e_0^{(2)} = (\theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)})$ – точки на різних сторонах кута K_1 такі, що $|e_0^{(j)}| = 1$ для $1 \leq j \leq 2$. Для визначеності вважаємо, що $e_0^{(1)}$ – перша точка, яка зустрічається при русі з точки $(-1; 0)$ вздовж кола $|\sigma| = 1$ за годинниковою стрілкою.

Якщо $\theta_1^{(1)} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ і $\theta_2^{(1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, то для $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in K_1, |\sigma| = 1, \sigma_2 \geq \sigma_1$ маємо

$$\theta_1^{(1)} \leq \sigma_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \sigma_2 \geq \theta_2^{(1)},$$

тому $\langle \sigma, \lambda_n \rangle \geq \langle e_0^{(1)}, \lambda_n \rangle$, тобто

$$n(t, \sigma, F) \leq n(t, e_0^{(1)}, F).$$

Якщо ж $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \theta_1^{(1)} \leq 0$ і $\frac{1}{\sqrt{2}} < \theta_2^{(1)} \leq 1$, то для $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in K_1, |\sigma| = 1, \sigma_2 \geq \sigma_1, \frac{\theta_1^{(1)}}{\theta_2^{(1)}\sqrt{2}} \leq \sigma_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ маємо

$$\sigma_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \alpha \theta_2^{(1)}, \sigma_1 \geq \alpha \theta_1^{(1)}$$

де $\alpha = \frac{1}{\theta_2^{(1)}\sqrt{2}}$, а для $\theta_1^{(1)} \leq \sigma_1 \leq \frac{\theta_1^{(1)}}{\theta_2^{(1)}\sqrt{2}}$ маємо

$$\sigma_2 = \sqrt{1 - e_1^2} \geq \sqrt{1 - (\theta_1^{(1)})^2} = \theta_2^{(1)},$$

тому в обидвох випадках

$$\langle \sigma, \lambda_n \rangle \geq \alpha \langle e_0^{(1)}, \lambda_n \rangle,$$

тобто

$$n(t, \sigma, F) = \sum_{\langle \sigma, \lambda_n \rangle \leq t} 1 \leq \sum_{\langle e_0^{(1)}, \lambda_n \rangle \leq t/\alpha} 1 = n(t/\alpha, e_0^{(1)}, F),$$

де суми поширюються лише на та індекси n що $F_n \neq 0$. Отже, для $\sigma \in K_1, |\sigma| = 1, \sigma_1 \geq \sigma_2$ у будь-якому випадку для всіх $t > 0$

$$n(t, \sigma, F) \leq n(t/\alpha, e_0^{(1)}, F),$$

де $\alpha \in (1/\sqrt{2}, 1)$ – деяка стала.

Подібно переконуємося, що для $\sigma \in K_1, |\sigma| = 1, \sigma_1 \leq \sigma_2$ і для всіх $t > 0$

$$n(t, \sigma, F) \leq n(t/\beta, e_0^{(2)}, F),$$

для деякої сталої $\beta \in (1/\sqrt{2}, 1)$.

Отже, з (2.3) отримуємо, що при $\sigma = te_0$

$$F(\sigma) \leq 2\mu(\sigma, F)n_0(\delta g'(t), F), \quad (2.3)$$

де $\delta = 2\max\left\{\frac{1}{\alpha}; \frac{1}{\beta}\right\}$, $n_0(u, F) = \max\left\{n(u, e_0^{(1)}, F); n(u, e_0^{(2)}, F)\right\}$. Позаяк $e_0^{(1)} \in \gamma_1(F)$, $e_0^{(2)} \in \gamma_1(F)$, то $\int_0^{+\infty} u^{-2} \ln n_0(u, F) du < +\infty$, а остання умова є рівносильна (4) до умови: існує додатна неперервна зростаюча функція $\varphi(t)$ така, що $\int_0^{+\infty} \frac{du}{\varphi(u)} < +\infty$ і

$$\ln n_0(u) = o(\varphi^{-1}(u)) \quad (u \rightarrow +\infty), \quad (2.4)$$

де $\varphi^{-1}(u)$ – функція обернена до функції $\varphi(u)$.

Залишається довести, що для кожного $\sigma \notin E, \sigma = te_0$

$$\delta g'(t) \leq \varphi(g(t)) = \varphi(\ln F(\sigma)), \quad (2.5)$$

де E – множина така, що

$$\int \int_{E \cap K_1} \frac{d\sigma}{|\sigma|} < +\infty.$$

Визначимо $E = \{\sigma: \delta g'(t) > \varphi(g(t)), \sigma = te_0\}$, а для фіксованого e_0 , $E(e_0) = \{t > 0: \gamma g'(t) > \varphi(g(t))\}$. Переходячи до полярних координат $\sigma_1 = t \cos \tau, \sigma_2 = t \sin \tau$, отримуємо

$$\begin{aligned} \int \int_{E \cap K_1} \frac{d\sigma}{|\sigma|} &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\int_{E(e_0)} dt \right) d\tau \leq \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\int_{E(e_0)} \frac{g'(t)}{\varphi(g(t))} dt \right) d\tau \leq \\ &\leq \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\int_{g(E(\varphi_0))} \frac{du}{\varphi(u)} \right) d\tau \leq \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{du}{\varphi(u)} \right) d\tau \leq \frac{3\pi}{2} \delta \int_0^{+\infty} \frac{du}{\varphi(u)} < +\infty, \end{aligned}$$

при цьому τ_j такі, що $e_0^{(j)} = (\cos \tau_j, \sin \tau_j) i - \frac{\pi}{2} < \tau_1 < \tau_2 < \pi$.

Позаяк F – не зводиться до експоненційного многочлена, то $\gamma_1(F) \subset \gamma(\mu)$ і тому $|\sigma| = o(\ln F(\sigma))$ ($|\sigma| \rightarrow +\infty, \sigma \in \overline{K_1} \subset \gamma_1(F)$). Отже, з (2.1) при $t \rightarrow +\infty$ отримуємо

$$\inf\{g'(t): e_0 \in \overline{K_1}\} \geq \inf\left\{\frac{1}{t} \ln F(te_0): e_0 \in \overline{K_1}\right\} \rightarrow +\infty.$$

Тому з (2.3)- (2.5) при $\sigma = te_0, |\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in \overline{K_1} \setminus E$) маємо

$$\begin{aligned} \ln F(\sigma) &\leq \ln 2 + \ln \mu(\sigma, F) + \ln n_0(\delta g'(t), F) = \\ &= \ln \mu(\sigma, F) + o(\varphi^{-1}(\delta g'(t))) \leq \ln \mu(\sigma, F) + o(\varphi^{-1}(\varphi(\ln F(\sigma)))) = \\ &= \ln \mu(\sigma, F) + o(\ln F(\sigma)). \end{aligned}$$

Теорему 2.1 доведено.

З теореми 2.1 негайно отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 2.1 Для того, щоб для кожної функції $F \in S^2(\lambda)$ співвідношення (1.2) виконувалося при $|\sigma| \rightarrow +\infty$ ($\sigma \in \mathbb{R}_+^2 \setminus E$), де $\int \int_E \frac{d\sigma}{|\sigma|} < +\infty$, необхідно і досить, щоб при $j = 1$ і $j = 2$ виконувалась умова (1.3).

Доведення. Перед формулюванням теореми 2.1 вже відзначалось, що з умови (1.3) випливає включення $\mathbb{R}_+^2 \subset \gamma_1(F)$. Тому достатність отримуємо негайно з теореми 2.1.

Для доведення необхідності, припустимо для визначеності, що

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\lambda_k^{(1)}} = +\infty,$$

тоді, як уже відзначалось вище

$$\int^{+\infty} t^{-2} \ln n_j(t) dt = +\infty.$$

Тому за наслідком [2] існує $F \in S^2(\lambda)$ з невід'ємними коефіцієнтами така, що для всіх $\sigma_1 \geq \sigma_1^0, \sigma_2 \leq \sigma_1$ і деякого $d > 0$

$$\ln F(\sigma_1; \sigma_2) \geq (1 + d) \ln \mu(\sigma_1; \sigma_2). \quad (2.6)$$

Залишається зауважити, що для $E^+ = \{(\sigma_1; \sigma_2) \in \mathbb{R}^2 : \sigma_1 \geq a > 0, 0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1\}$

$$\int \int_{E^+} \frac{d\sigma}{|\sigma|} \geq \int_0^{\pi/4} \left(\int_a^{+\infty} dt \right) d\tau = +\infty.$$

Наслідок 2.1 доведено.

Таким чином отримуємо, що знайдене у цьому пункті описання виняткової множини у співвідношенні Бореля у певному сенсі найкраще можливе у всьому класі $S^2(\lambda)$.

Правильна наступна теорема.

Теорема 2.2. Існує послідовність λ , для якої при $j = 1, j = 2$ виконується умова (1.3), існують функція $F \in S_+^2(\lambda)$, локально вимірна множина $E \in \mathbb{R}_+^2$ така, що

$$\int \int_{E \cap \mathbb{R}_+^2} \frac{\ln^2 |\sigma| d\sigma}{|\sigma|} = +\infty$$

і стала $d > 0$ такі, що нерівність (2.6) виконується для всіх $\sigma \in E$.

Доведення. Нехай $f_1 \in S_+^1(\lambda^1)$, а функція $f_2 \in S_+^1(\lambda^2)$ довільна така, що

$$\mu(t, f_2) \leq \mu(t, f_1) \quad (t > 0),$$

де $\lambda^2 = (\lambda_k^{(2)})$ – довільна послідовність, зокрема така, що при $j = 2$ виконується умова (1.3). Зрозуміло, що такий вибір функції f_2 – можливий, позаяк підклас класу $S_+^1(\lambda^2)$, в який входять функції f_2 такі, що $\mu(t, f_2) \leq$

$\varphi(t)$ ($t \geq t_0$), не порожний для кожної фіксованої функції $\varphi(t)/t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$).

Виберемо в лемі 3 з [5] $h'(x) = \ln x^2$. Тоді для всіх $x \in [\kappa_k, \kappa_k + c_k^*/h'(\kappa_k)]$, $0 \leq y \leq x$, $k \geq 1$ для функції $F(x; y) = f_1(x)f_2(y)$ маємо $F \in S^2(\lambda)$ і за нерівністю Коші

$$\begin{aligned} \ln F(x; y) &\geq (1 + h) \ln \mu(x, f_1) + \ln \mu(y, f_2) \geq \\ &\geq (1 + h/2)(\ln \mu(x, f_1) + \ln \mu(y, f_2)) = \\ &= (1 + h/2) \ln \mu(x, y, F). \end{aligned}$$

Залишається тепер зауважити, що для множини

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \kappa_k \leq x \leq \kappa_k + \frac{c_k^*}{h'(\kappa_k)}, 0 \leq y \leq x, k \geq 1 \right\}$$

маємо

$$\begin{aligned} \int \int_E \frac{\ln^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int \int_E \frac{\ln^2 x g x dy}{x} \geq \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{\kappa_k} dy \int_{\kappa_k}^{\kappa_k + c_k/\ln^2(\kappa_k)} \frac{\ln^2 x g x}{x} \geq \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} \kappa_k \ln^2 \kappa_k \left(\kappa_k + \frac{c_k^*}{\ln^2 \kappa_k} \right)^{-1} \int_{\kappa_k}^{\kappa_k + c_k/\ln^2(\kappa_k)} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^* \kappa_k \left(\kappa_k + \frac{c_k^*}{\ln^2 \kappa_k} \right)^{-1} \end{aligned}$$

а $\kappa_k \left(\kappa_k + \frac{c_k^*}{\ln^2 \kappa_k} \right)^{-1} \rightarrow 1$ ($k \rightarrow +\infty$), а також $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^* = +\infty$, тому останній ряд розбіжний, а отже

$$\int \int_E \frac{\ln^2 |\sigma| d\sigma}{|\sigma|} = +\infty$$

Теорему 2.2 доведено.

З теореми 2.2 безпосередньо отримуємо наступне твердження.

Наслідок 2.2. Існує послідовність λ , для якої при $j = 1, j = 2$ виконується умова (1.3), існують функція $F \in S_+^2(\lambda)$, локально вимірنا множина $E \subset \mathbb{R}_+^2$ така, що для кожного $\varepsilon > 0$

$$\int \int_{E \cap \mathbb{R}_+^2} \frac{d\sigma}{|\sigma|^{1-\varepsilon}} = +\infty$$

і стала $d > 0$ такі, що нерівність (2.6) виконується для всіх $\sigma \in E$.

Справді, $|\sigma|^\varepsilon > \ln^2 |\sigma|$ для всіх досить великих $|\sigma|$ і тому залишається застосувати теорему 2.2.

3. Висновки

Таким чином, у даній роботі розглянуто клас цілих функцій, зображених абсолютно збіжними подвійними рядами Діріхле.

Встановлено точні оцінки величини виняткової множини для виконання співвідношення Бореля.

Основні результати доведені у теоремах 2.1, 2.2 та наслідках 2.1, 2.2, де показано, що описання цієї виняткової множини у певному сенсі найкраще можливе в усьому класі функцій $S^2(\lambda)$.

Результати магістерської роботи опубліковано в матеріалах XII міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми сучасної науки» (Дрогобич, 2025)

4. Список використаних джерел

1. O. Skaskiv. On the behavior of the maximum term of a Dirichlet series defining an entire function // Mathematical Notes. – 1985, 37, №1, p. 41-47.
2. О. Скасків, О. Орицин. Узагальнення теореми Бореля для кратних рядів Діріхле // Математичні студії. – 1997, Т.8, №1, С.43-52.
3. О. Скасків, М. Луцишин. Про мінімум модуля кратного ряду Діріхле // Український математичний журнал. – 1992, Т.44, №9, С.1296-1298.
4. O. Skaskiv. On some relations between the maximum modulus and the maximum term of an entire Dirichlet series // Mathematical Notes. – 1999, 66, №2, p.282-292.
5. M. Sheremeta. On relation between the maximal term and the maximum modulus of the entire Dirichlet series // Mathematical Notes. – 1992, 52, №5, p.141-148.