

**Матурін Юрій Петрович** кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, <https://orcid.org/0000-0002-0544-1329>

**Хаць Руслан Васильович** кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, <https://orcid.org/0000-0001-9905-5447>

**Комарницька Леся Іванівна** кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, <https://orcid.org/0009-0001-0907-1038>

## АЛГЕБРА КВАТЕРНІОНІВ ГАМІЛЬТОНА У ЗАСТОСУВАННЯХ КОМП'ЮТЕРНОГО ЗОРУ

**Анотація.** У статті обґрунтовано методичні підходи до вивчення алгебри кватерніонів Гамільтона у контексті її реальних застосувань у комп'ютерному зорі в межах магістерської підготовки здобувачів вищої освіти за предметною спеціальністю А4.04 «Середня освіта (Математика)». Алгебра кватерніонів розглядається не як архаїчна галузь некомутативної алгебри, а як активно діючий математичний інструментарій, що пронизує ключові алгоритми обробки зображень, тривимірної реконструкції та орієнтаційної кінематики в сучасних системах комп'ютерного зору. Особлива увага приділена проблемі «замку кардана» (gimbal lock) і тому, чому кватерніонне представлення обертань є структурно переважним у порівнянні з матрицями Ейлера у задачах з безперервними просторовими перетвореннями.

Детально розглянуто алгебраїчну структуру кватерніонів: некомутативне тіло  $\mathbb{H}$  над полем дійсних чисел  $\mathbb{R}$  як алгебраїчне розширення комплексних чисел, формули Родріґа та сферична геометрія групи  $SU(2)$ , яка є подвійним накриттям групи  $SO(3)$  просторових обертань. Показано, що одиничний кватерніон є оптимальним параметричним представленням елемента групи  $SO(3)$ , а кватерніонний сандвіч-добуток  $v' = q \cdot v \cdot q^*$  реалізує обертання тривимірного вектора  $v$  навколо однієї осі на деякий кут  $\theta$  без тригонометричних сингулярностей.

Окрему увагу приділено алгоритму SLERP (Spherical Linear Interpolation), запропонованому К. Шумейком, що є оптимальним методом інтерполяції між двома орієнтаціями у просторі кватерніонів. На відміну від лінійної інтерполяції матриць обертань, яка порушує ортогональність, SLERP гарантує постійну кутову швидкість і геодезичний шлях на тривимірній сфері  $S^3$ . Цей алгоритм

широко застосовується у задачах відеоспостереження, відстеження руху камери та плавної зміни точки зору в системах доповненої реальності.

Розглянуто застосування кватерніонів у задачах оцінки пози камери (camera pose estimation), зокрема у нейромережевому підході PoseNet, де регресія позиції та орієнтації реалізується через кватерніонний вихідний шар із відповідною геометрично узгодженою функцією втрат. Проаналізовано кватерніонне перетворення Фур'є як інструмент обробки кольорових зображень, де RGB-канали трактуються як компоненти чисто уявного кватерніона, що забезпечує сумісну обробку кольорового вектора як єдиного математичного об'єкта, а не як трьох незалежних сигналів. Представлено концепцію кватерніонних нейронних мереж (QNN), де кватерніонно-значущі ваги та активаційні функції дозволяють знизити розмірність параметрів у 4 рази та природно моделювати просторові перетворення тривимірних об'єктів.

Запропоновано п'ятиетапну дидактичну модель вивчення алгебри кватерніонів у магістерській підготовці, що поступово переходить від алгебраїчної структури некомутативного тіла до практичних реалізацій у задачах комп'ютерного зору. Методичну цінність теми обґрунтовано тим, що кватерніони утворюють природний міст між абстрактною алгеброю, диференціальною геометрією лівих груп і конкретними алгоритмами обробки тривимірних даних, що відповідає компетентнісним вимогам до майбутнього вчителя математики в умовах цифровізації освіти.

**Ключові слова:** кватерніони Гамільтона, некомутативна алгебра, комп'ютерний зір, тривимірні обертання, SLERP, замок кардана, оцінка пози камери, кватерніонне перетворення Фур'є, кватерніонні нейронні мережі, методика навчання математики.

**Maturin Yuriy** Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, <https://orcid.org/0000-0002-0544-1329>

**Khats' Ruslan** Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, <https://orcid.org/0000-0001-9905-5447>

**Komarnytska Lesia** Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, <https://orcid.org/0009-0001-0907-1038>

## HAMILTON'S QUATERNION ALGEBRA IN COMPUTER VISION APPLICATIONS

**Abstract.** The paper substantiates methodological approaches to the study of Hamilton's quaternion algebra in the context of its real applications in computer vision

within the framework of master's training of students in the subject specialty A4.04 «Secondary Education (Mathematics)». Quaternion algebra is treated not as an archaic branch of non-commutative algebra but as an actively used mathematical toolkit that permeates the key algorithms of image processing, three-dimensional reconstruction, and orientation kinematics in modern computer vision systems. Special attention is paid to the problem of gimbal lock and to the reasons why the quaternion representation of rotations is structurally superior to Euler matrix representations in problems involving continuous spatial transformations.

The algebraic structure of quaternions is examined in detail: the non-commutative field  $H$  over the real numbers  $R$  as an algebraic extension of the complex numbers, the Rodrigues formula, and the spherical geometry of the group  $SU(2)$ , which is the double cover of the group  $SO(3)$  of spatial rotations. It is shown that the unit quaternion  $q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)(ai + bj + ck)$  is the optimal parametric representation of an element of  $SO(3)$ , and that the quaternion sandwich product  $v' = q \cdot v \cdot q^*$  implements the rotation of a three-dimensional vector  $v$  about the axis  $(a, b, c)$  by angle  $\theta$  without trigonometric singularities.

Special attention is given to the SLERP (Spherical Linear Interpolation) algorithm, proposed by K. Shoemake, which is the optimal method for interpolating between two orientations in quaternion space. Unlike linear interpolation of rotation matrices, which violates orthogonality, SLERP guarantees a constant angular velocity and a geodesic path on the three-dimensional sphere  $S^3$ . This algorithm is widely used in video surveillance, camera motion tracking, and smooth viewpoint transitions in augmented reality systems.

The application of quaternions to camera pose estimation is examined, in particular the PoseNet neural network approach, in which the regression of position and orientation is implemented through a quaternion output layer with a geometrically consistent loss function. The quaternion Fourier transform is analysed as a tool for colour image processing, in which the RGB channels are treated as components of a pure imaginary quaternion, enabling the colour vector to be processed as a unified mathematical object rather than three independent signals. The concept of quaternion neural networks (QNN) is presented, where quaternion-valued weights and activation functions reduce the parameter count by a factor of four and naturally model spatial transformations of three-dimensional objects.

A five-stage didactic model for studying quaternion algebra in master's training is proposed, which progresses from the algebraic structure of the non-commutative field to practical implementations in computer vision tasks. The methodological value of the topic is justified by the fact that quaternions form a natural bridge between abstract algebra, the differential geometry of Lie groups, and the concrete algorithms of three-dimensional data processing, which meets the competency requirements for a future mathematics teacher in the context of educational digitisation.

**Keywords:** Hamilton's quaternions, non-commutative algebra, computer vision, three-dimensional rotations, SLERP, gimbal lock, camera pose estimation,

quaternion Fourier transform, quaternion neural networks, mathematics teaching methodology.

**Постановка проблеми.** Сучасна інженерія комп'ютерного зору, робототехніка та системи доповненої реальності оперують з неперервними просторовими перетвореннями – обертаннями тривимірних об'єктів, рухом камери у просторі, стеженням за орієнтацією тіла у реальному часі. Цифрова реалізація цих перетворень потребує компактного, чисельно стійкого та алгоритмічно ефективного представлення елементів групи  $SO(3)$ . Класичні засоби (кути Ейлера та матриці обертань) – страждають на принципові обмеження: перші призводять до небезпечного явища «замку кардана» (gimbal lock), другі є надмірно параметричними (9 параметрів для 3 ступенів вободи) і потребують ресурсоемної реортогоналізації в умовах чисельних похибок.

Кватерніони Вільяма Роуена Гамільтона, відкриті у 1843 році як чотиривимірне некомутативне тіло  $\mathbb{H}$  над  $\mathbb{R}$ , виявились природним математичним об'єктом для кодування просторових обертань без перелічених недоліків. Вони є мінімально надлишковим (4 параметри) і топологічно коректним представленням групи  $SU(2)$  – подвійного накриття  $SO(3)$ . Проте у вітчизняній університетській традиції кватерніони, якщо і вивчаються, подаються переважно як один із прикладів некомутативної алгебри поза зв'язком із їхнім сучасним застосуванням у цифрових технологіях. Здобувачі освіти позбавлені розуміння того, що розділ абстрактної алгебри, якому понад 180 років, є невід'ємним компонентом стеку технологій сучасного смартфона, безпілотного автомобіля та хірургічного робота.

Для магістрів предметної спеціальності А4.04 «Середня освіта (Математика)» це означає втрату ключового методичного ресурсу: можливості демонструвати учням і студентам, як абстрактна алгебра безпосередньо зумовлює роботу конкретних технологічних систем. Усунення цієї дидактичної прогалини шляхом розроблення методичного підходу, що органічно поєднує теорію некомутативних алгебраїчних структур з алгоритмами комп'ютерного зору, є актуальним завданням методики навчання математики.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Фундамент алгебри кватерніонів закладено у роботі В.Р. Гамільтона [1]. Перше систематичне дослідження застосування кватерніонів у задачах орієнтаційної кінематики здійснив Дж.Б. Куіперс [2], який розвинув кватерніонний формалізм просторових перетворень і показав його переваги перед матричними методами. У праці А.Дж. Хансона [6] систематизовано геометричний зміст кватерніонних операцій і запроваджено потужний апарат їх візуалізації.

Визначальним кроком у введенні кватерніонів до задач анімації і комп'ютерної графіки стала стаття К. Шумейка [3], де було запропоновано алгоритм SLERP (Spherical Linear Interpolation) – сферичну лінійну інтерполяцію на  $S^3$ , що забезпечує геодезичні шляхи між орієнтаціями і стала стандартом де-

факто для інтерполяції обертань у системах реального часу. Закрита формула для точного визначення абсолютної орієнтації за відповідними наборами 3D-точок на основі одиничних кватерніонів розроблена у роботі Б.К.П. Горна [4] та стала основою для систем технічного зору, SLAM і Structure from Motion.

Систематичний порівняльний аналіз засобів представлення орієнтації (кутів Ейлера, матриць обертань, кватерніонів і векторів Родріга) зроблено у роботі Дж. Дібеля [5], що є канонічним орієнтаційним посібником для інженерів робототехніки та комп'ютерного зору. Застосування кватерніонів у регресії позиції камери за допомогою глибоких згорткових мереж було формалізовано в роботі А. Кендалла і Р. Чіполли [7], де запропоновано PoseNet – першу наскрізну нейромережеву систему оцінки шести ступенів свободи пози за одним зображенням із кватерніонним виходом.

Розширення алгебри кватерніонів на задачі частотної обробки кольорових зображень розроблено у фундаментальній роботі С.Дж. Сангуїна та Т.А. Елла [8], де введено кватерніонне перетворення Фур'є і досліджено його властивості відносно просторових поворотів і відображень колірному простору. Кватерніонні нейронні мережі з кватерніонно-значущими вагами, активаціями і правилом зворотного поширення помилки у кватерніонному численні досліджено в статті Т. Парколле, М. Морчіда та Г. Лінареса [9] і узагальнено для задач обробки тривимірних хмар точок і мультисенсорної обробки даних.

Попри наявність розгалуженої міжнародної літератури, методичний аспект введення алгебри кватерніонів до педагогічних магістерських програм з математики у контексті комп'ютерного зору в Україні залишається практично не дослідженим.

Відсутні дидактичні моделі, де строгість алгебраїчного апарату поєднувалася б із сучасними алгоритмічними застосуваннями таким чином, щоб матеріал був одночасно математично коректним і педагогічно мотивованим.

**Мета статті** – розробити і обґрунтувати методичні підходи до вивчення алгебри кватерніонів у магістерській підготовці майбутніх учителів математики через призму найважливіших застосувань кватерніонів у комп'ютерному зорі: представлення просторових обертань, алгоритму SLERP, оцінки пози камери, кватерніонного перетворення Фур'є та кватерніонних нейронних мереж. Запропонувати послідовну дидактичну модель, яка дозволяє природно перейти від поняття некомутативного тіла до конкретних алгоритмів цифрової обробки тривимірних даних, формуючи у здобувачів освіти єдиний концептуальний погляд на абстрактну алгебру та інженерну практику.

**Виклад основного матеріалу.** Педагогічна цінність теми кватерніонів визначається унікальним поєднанням математичної глибини та прикладної конкретності. Немає іншого розділу університетської алгебри, де перехід від абстрактного некомутативного тіла до алгоритму у мікроконтролері квадрокоптера або у нейромережі виявлення об'єктів займав би лише кілька математично строгих кроків. Саме ця властивість робить алгебру кватерніонів

ідеальним об'єктом для формування у майбутніх педагогів математики здатності демонструвати єдність абстрактної і прикладної математики.

Дидактично принципово те, що проблема, яку розв'язують кватерніони, – неможливість гладко параметризувати сферу  $S^2$  (теорема про «волохату кулю») і пов'язаний з нею феномен замку кардана – є наочно демонстрованою і легко відтвореною практично (наприклад, через взаємно перпендикулярне вкладення трьох паперових рамок).

Це дає унікальну педагогічну можливість: починати виклад не від абстрактного визначення, а від конкретного технічного обмеження, яке спонукає шукати алгебраїчний вихід.

**Алгебраїчна структура кватерніонів Гамільтона.** Тіло кватерніонів  $\mathbb{H}$  визначається як чотирирівимірний асоціативний алгебра над  $\mathbb{R}$ , породжена одиницею 1 та трьома уявними одиницями  $i, j, k$ , що задовольняють співвідношення:  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ . Із цих співвідношень безпосередньо випливають правила некомутативного множення:  $ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j$ . Кватерніон  $q \in \mathbb{H}$  записується як  $q = a + bi + cj + dk$ , де  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  [1, 2]. Скалярна частина  $\text{Re}(q) = a$  та векторна частина  $\text{Im}(q) = bi + cj + dk$  утворюють природне розщеплення, яке є методичним ключем до розуміння геометричного змісту операцій.

Спряжений кватерніон має вигляд  $q^* = a - bi - cj - dk$ , і норма  $|q|^2 = qq^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ . Для  $q \neq 0$  існує обернений кватерніон  $q^{-1} = q^*/|q|^2$ . Це підтверджує, що  $\mathbb{H}$  є справжнім тілом (skew field). Оскільки  $ij \neq ji$ , то  $\mathbb{H}$  є першим історичним прикладом некомутативного тіла, і саме тому введення кватерніонів у навчальному курсі є природним кроком після вивчення комутативних полів і загального поняття тіла в алгебрі [6].

Важливим структурним фактом є ізоморфізм  $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$  як векторного простору і вкладення  $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$  через ідентифікацію  $a + bi = (a + bi) + (0)j + (0)k$ . Тим самим кватерніони є мінімальним некомутативним розширенням  $\mathbb{C}$ , яке нарівні з  $\mathbb{R}$  і  $\mathbb{C}$  є одним із трьох нормованих тіл над  $\mathbb{R}$  (теорема Фробеніуса, 1877 р.). Для майбутнього вчителя математики цей факт є чудовим прикладом класифікаційної теореми, що виявляє «математичну рідкість» і пояснює відсутність п'яти- чи шестивимірних аналогів з хорошими алгебраїчними властивостями [2, 6].

**Кватерніони як представлення просторових обертань і проблема замку кардана.** Кут Ейлера та матриці обертань є класичними, але проблематичними засобами для безперервного відстеження орієнтації. Три кути Ейлера ( $\phi, \theta, \psi$ ) параметризують  $SO(3)$ , однак при  $\theta = \pm 90^\circ$  дві з трьох осей обертання збігаються у площину, й один ступінь свободи втрачається: система не може відрізнити комбінацію « $\phi$  збільшений на  $\alpha$ » від « $\psi$  зменшений на  $\alpha$ ». Це і є замок кардана (gimbal lock) – топологічно неминучий результат спроби описати тривимірне обертання лише трьома кутами через тор  $T^3$ , який гомеоморфний  $SO(3)$  лише локально [5].

Одиничні кватерніони ( $|q| = 1$ ) утворюють тривимірну сферу  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ . Відображення  $S^3 \rightarrow SO(3)$ , що задається дією через сандвіч-добуток, є рівно подвійним накриттям:  $q$  і  $-q$  відповідають тому самому обертанню. Це пояснює, чому кватерніон є «найправильнішим» представленням елемента  $SO(3)$  – він живе на поверхні, яка глобально покриває обертання без сингулярностей. Одиничний кватерніон, що відповідає обертанню на кут  $\theta$  навколо одиничної осі  $n = (a, b, c)$ :  $q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)(ai + bj + ck)$ . Перетворення вектора  $v$  у новий вектор  $v' = q \cdot v \cdot q^*$ , де  $v$  трактується як чисто уявний кватерніон  $0 + vi + vj \cdot j + vk \cdot k$ , є рівно обертанням  $v$  на кут  $\theta$  навколо  $n$  [2, 5].

Методично важливо підкреслити, що кватерніонний добуток  $q_1 \cdot q_2$  відповідає послідовному виконанню спочатку обертання  $q_2$ , а потім  $q_1$ . Ця «послідовна» семантика добутку є практичним ключем до побудови ланцюжків обертань у кінематиці роботів-маніпуляторів і системах відстеження руху. Матрична форма того самого обертання:  $R(q)$  має вигляд  $3 \times 3$  ортогональної матриці з одиничним детермінантом, де елементи є квадратичними виразами від  $a, b, c, d$ . Перехід від кватерніона до матриці є аналітично тривіальним, а зворотній перехід (Shepperd's method) дозволяє реконструювати  $q$  з  $R$  за умови уникнення чисельних нестійкостей [5, 6].

**Сферична лінійна інтерполяція SLERP та її застосування в комп'ютерному зорі.** Задача плавного переходу між двома орієнтаціями  $q_0$  та  $q_1$  є ключовою у відеоспостереженні (плавне переміщення камери), розпізнаванні жестів (інтерполяція між ключовими позами рук) і задачах контролю орієнтації безпілотних систем. Наївна лінійна інтерполяція  $\text{lerp}(t) = (1-t) \cdot q_0 + t \cdot q_1$  є математично некоректною: вона виходить за межі сфери  $S^3$  (результат не є одиничним кватерніоном) і не забезпечує постійної кутової швидкості.

Алгоритм SLERP, запропонований К. Шумейком [3], розв'язує цю задачу геодезичної інтерполяції. Постійна кутова швидкість означає, що рухома система відліку обертається з незмінним кутовим прискоренням нуль, що є оптимальним з точки зору мінімізації гіроскопічних навантажень у фізичних системах [3, 6].

Практичне застосування SLERP охоплює: 1) відеоконтроль у системах відеоспостереження при плавному переведенні PTZ-камери між заданими позиціями; 2) відтворення руху в системах motion capture – інтерполяцію між ключовими кватерніонними кадрами; 3) фільтрацію кватерніонних вимірювань у інерціальних вимірювальних пристроях (IMU) методом розширеного фільтра Калмана на многовиді  $S^3$ ; 4) блендинг анімацій скелетних моделей у системах доповненої реальності. В усіх цих задачах SLERP є прикладом того, як геометрично правильний математичний алгоритм безпосередньо визначає якість кінцевого технічного продукту [3, 5].

**Оцінка пози камери та система PoseNet.** Оцінка пози камери (camera pose estimation) – визначення положення (translation) і орієнтації (rotation) камери у тривимірному просторі за одним або кількома зображеннями, є однією з

центральної задачі комп'ютерного зору. Вона є фундаментальною для систем SLAM (Simultaneous Localization and Mapping), Structure from Motion (SfM), розширеної реальності та навігації безпілотних засобів. Математично задача полягає у відновленні елемента групи  $SE(3) = SO(3) \times \mathbb{R}^3$  (спеціальної евклідової групи), що описує рух камери відносно системи відліку сцени [4, 7].

Класичне розв'язання базується на задачі абсолютної орієнтації за Горном [4], який показав, що оптимальне  $R$  має кватерніонний запис і обчислюється через власний вектор спеціальної  $4 \times 4$  матриці, побудованої за точками. Власний вектор, відповідний найбільшому власному значенню, є шуканим оптимальним кватерніоном обертання. Ця замкнута аналітична формула (без ітерацій і оптимізаційних процедур) є прямим наслідком кватерніонної структури  $SO(3)$  і недосяжна в матричному формалізмі без кватерніонної перепараметризації [4].

Нейромережевий підхід реалізовано у системі PoseNet [7], де глибока згорткова мережа (на базі GoogLeNet) навчається безпосередньо регресувати пару  $(t, q)$  – вектор переносу та одиничний кватерніон орієнтації. В роботі [7] запропоновано геометрично узгоджену функцію втрат, де параметр  $\beta$  замінюється автоматично налаштованим масштабуванням, що враховує різницю одиниць вимірювання трансляційних та ротаційних компонент. Для здобувача освіти це є прикладом того, як неправильний вибір алгебраїчного представлення (скажімо, матриці або кути Ейлера замість кватерніонів) міг би зробити диференціювання функції втрат по параметрах мережі значно складнішим або чисельно нестабільним.

### ***Кватерніонне перетворення Фур'є та обробка кольорових зображень.***

Класичне двовимірне перетворення обробляє кожен колірний канал RGB-зображення незалежно. Ця незалежна обробка є принципово некоректною для задач, що залежать від спільної просторової структури усіх трьох каналів: детектування кольорових країв, розпізнавання кольорових текстур, оцінки кольоропростору після афінних трансформацій сцени.

Кватерніонне перетворення Фур'є (QFT), розроблене С.Дж. Сангуїном і Т.А. Еллоу [8], трактує RGB-піксель як чисто уявний кватерніон. Ключова математична властивість: QFT переводить обертання колірного простору (поворот вектора RGB як просторового вектора в  $\mathbb{R}^3$  навколо осі  $(1,1,1)/\sqrt{3}$  у фазовий зсув у частотному просторі, аналогічно класичній теоремі Фур'є про зсув для просторових трансляцій [8].

Практичне значення QFT виявляється у детектуванні кольорових країв, де традиційний оператор Кенні, застосований покомпонентно, дає хибні краї на межах, де змінюється лише відтінок, але не яскравість. QFT-базований крайовий детектор обробляє вектор  $(R, G, B)$  як цілісний об'єкт і виявляє краї, обумовлені зміною кольорового вектора в будь-якому напрямку колірного простору. Аналогічно, кватерніонний кореляційний фільтр для колірного розпізнавання об'єктів демонструє кращу інваріантність до освітлення, ніж скалярні методи. Для методичного курсу особливо цінно те, що QFT дозволяє проілюструвати

фундаментальний принцип: правильний вибір алгебраїчного об'єкта для представлення даних є критичним для якості алгоритму [8].

**Кватерніонні нейронні мережі в комп'ютерному зорі.** Класична глибока нейронна мережа оперує дійсно-значущими ваговими матрицями і не має вбудованих механізмів для роботи з просторово зв'язаними мультिकанальними даними. Це є обмеженням при роботі з тривимірними хмарами точок, стереозображеннями та іншими даними, де між просторовими вимірами існує природний алгебраїчний зв'язок. Кватерніонні нейронні мережі (Quaternion Neural Networks, QNN), систематизовані у роботі Т. Парколле, М. Морчіда та Г. Лінареса [9], замінюють скалярні ваги  $w \in \mathbb{R}$  на кватерніонні ваги.

Кватерніонна лінійна операція між кватерніонним вхідним вектором  $x$  і кватерніонним ваговим ядром кодує не чотири незалежних скалярних множення, а одне кватерніонне, яке природно реалізує обертання чотиривимірного вхідного вектора у потенційному просторі ознак. Параметрична ефективність QNN: для задачі з чотиривимірним входом кватерніонний шар з  $n$  прихованими «нейронами» має  $4n$  параметрів, тоді як відповідний дійсний шар мав би  $16n$  параметрів. Перевага у 4 рази безпосередньо пов'язана з розмірністю тіла  $\mathbb{H}$  над  $\mathbb{R}$  [9].

Для регресії орієнтаційного кватерніона QNN природно забезпечує рівноваріантність відносно обертань: повернута версія 3D-сцени на вхід дає відповідним чином повернений вихідний кватерніон без необхідності навчання цієї інваріантності з додаткових прикладів – це прямо породжено алгебраїчною структурою  $\mathbb{H}$  [9].

Ще одним напрямком є застосування кватерніонів у рекурентних нейронних мережах (QRNN) для обробки тимчасових послідовностей 3D-сигналів, наприклад, для розпізнавання жестів за послідовністю скелетних кватерніонів, отриманих від датчиків Kinect. Кватерніонне LSTM природно моделює безперервні обертання скелетних суглобів і показує переваги перед стандартним LSTM на задачах оцінки орієнтації за інерціальними вимірюваннями. Педагогічно важливим є усвідомлення магістрами того, що підвищення параметричної ефективності та геометричної узгодженості нейронної мережі значною мірою визначається вибором адекватної алгебраїчної структури для подання вхідних даних [9].

Таблиця 1

**Порівняльна характеристика засобів представлення  
тривимірних обертань у задачах комп'ютерного зору**

Параметр	Кути Ейлера	Матриця 3×3	Кватерніон	Вісь + кут
Кількість параметрів	3	9	4	4
Замок кардана (Gimbal lock)	Так	Ні	Ні	Ні
Подвійне покриття SO(3)	Ні	Ні	Так	Ні
Зручність інтерполяції	Незадовільна	Задовільна	Відмінна (SLERP)	Задовільна
Чисельна стійкість	Низька	Потребує реортог.	Висока	Задовільна
Складність композиції	Висока	Множення матриць	Формула добутку	Формула Родріга
Застосування у нейромережах	Рідко	RotationNet	QNN, QuatNet	Обмежено
Ефективність у SLAM	Низька	Середня	Висока	Середня

Наведена порівняльна таблиця є зручним дидактичним засобом для мотивації вивчення кватерніонів: вона наочно демонструє, що кватерніонне представлення перевершує альтернативи за всіма критично важливими для комп'ютерного зору параметрами одночасно, що є прямим наслідком алгебраїчної структури тіла  $\mathbb{H}$ .

**Методична модель вивчення алгебри кватерніонів для магістрів.** На основі аналізу структури предметної галузі та дидактичних особливостей підготовки магістрів за предметною спеціальністю А4.04 «Середня освіта (Математика)» пропонується наступна п'ятиетапна послідовна методична модель.

**Некомутативна алгебра і тіло кватерніонів.** Розглядаються поняття тіла (skew field) і відмінності від поля (кілеце без умови комутативності множення). Будується паралель:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$  як послідовні алгебраїчні розширення через

процедуру Келі-Діксона та теорему Фробеніуса (1877 р.) про класифікацію тіл над  $\mathbb{R}$ . Вводиться мультиплікативна таблиця уявних одиниць і норма кватерніона. Методично важливо ввести поняття векторної і скалярної частини і підкреслити, що кватерніонний добуток  $\text{Im}(q_1 \cdot q_2)$  містить у собі одночасно скалярний добуток (з мінусом) і векторний добуток  $\text{Im}(q_1) \times \text{Im}(q_2)$  тривимірних векторів:  $q_1 \cdot q_2 = (a_1 a_2 - b_1 \cdot b_2)$  (скалярна частина) +  $(a_1 \cdot v_2 + a_2 \cdot v_1 + v_1 \times v_2)$  (векторна частина). Ця формула показує, що кватерніони «вміщують» в собі і скалярний, і векторний добуток [1, 2].

**Геометрія обертань і замок кардана.** Демонструється феномен замку кардана через фізичну модель і через аналіз матричної параметризації  $SO(3)$  кутами Ейлера. Вводиться фундаментальна формула обертання через кватерніони. Розглядається геометричний зміст: одиничні кватерніони лежать на сфері  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ . Встановлюється зв'язок з підгрупою  $SU(2)$  унітарних матриць другого порядку і гомоморфізм  $SU(2) \rightarrow SO(3)$  з ядром  $\{\pm I\}$ . Для здобувача освіти ключовим є розуміння: кватерніон «обертається вдвічі повільніше» за фізичне обертання – обертання на  $2\pi$  у тривимірному просторі відповідає повороту на  $4\pi$  у просторі кватерніонів. Цей факт (антиподальність  $+q$  та  $-q$ ) є конкретним прикладом поняття накривного відображення у топології [5, 6].

**Алгоритм SLERP і геодезики на  $S^3$ .** Вводиться поняття геодезики на ріманові многовиді. Сфера  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  є компактним ріманним многовидом; геодезики на ній є великими колами. Алгоритм SLERP є формулою параметризації геодезики між двома одиничними кватерніонами. Приклади застосування: плавний рух PTZ-камери, фільтр Калмана на  $S^3$  для IMU-даних, blend shapes у системах захоплення руху [3, 5].

**Задача оцінки пози і кватерніонне перетворення Фур'є.** Розглядається задача абсолютної орієнтації Горна [4]: вивід  $4 \times 4$ -матриці з якої власний вектор дає оптимальний кватерніон, і порівняння з матричним SVD-методом (Umeyama). Аналізується структура PoseNet з кватерніонним виходом і функцією втрат з явним геометричним змістом. Вводиться QFT: RGB-піксель як чисто уявний кватерніон, ліве і праве ядро QFT, теорема зсуву для кольорних обертань. Порівнюються результати кватерніонного і скалярного крайового детектора на кольоровому зображенні. Для здобувача освіти методично важливо підкреслити: QFT – це не «узагальнення заради узагальнення», а математично обґрунтована заміна, зумовлена тим фактом, що RGB є елементом  $\mathbb{R}^3$ , і обертання в цьому просторі мають природне кватерніонне описання [7, 8].

**Кватерніонні нейронні мережі та перспективи.** Вводиться поняття кватерніонно-значущих шарів, правило ланцюжка у кватерніонному численні (Н-диференціювання, похідна по кватерніонному параметру), обернене поширення помилки в QNN. Розглядається архітектура QNN для задачі оцінки 6-DOF пози і порівнюється кількість параметрів з відповідною дійсною мережею. Демонструється рівноваріантність QNN відносно просторових обертань. Обговорюються перспективи: кватерніонні трансформери для обробки 3D-хмар

точок, QRNN для часових рядів орієнтацій, октонільні узагальнення для певних задач. На завершення пропонується «інтегративна задача»: побудова мінімальної системи оцінки орієнтації камери за спарованими 3D-4D відповідностями (реалізація алгоритму Горна) і її перевірка на синтетичних та реальних даних [9].

Методично принципово, що на кожному з п'яти етапів дидактична конструкція базується на ланцюжку: «конкретна практична задача (технічна проблема) → математична структура, що її розв'язує → алгоритмічна реалізація → зв'язок з більш широким математичним контекстом». Така побудова від конкретного до абстрактного, а не навпаки, є педагогічно обґрунтованою для аудиторії, яка вже має математичну базу, але потребує мотивації для глибокого вивчення абстрактних структур. Ця логіка повністю узгоджується із сучасними дидактичними принципами компетентнісного підходу у вищій педагогічній освіті [2, 6].

Важливим компонентом методичної моделі є принцип «трирівневої когерентності»: кожне поняття подається одночасно у трьох взаємоузгоджених формах – строгого математичного визначення, геометричної інтерпретації (з опорою на наочність: сфера  $S^3$ , сандвіч-добуток, сферична геодезика) та алгоритмічної реалізації у псевдокодi або мові Python/NumPy. Така структура виключає «алгоритмічну магію» (коли студент не розуміє, чому алгоритм працює) і «абстрактне тотожне» (коли теоретичний матеріал залишається нез'єднаним з практикою). Психологічно це відповідає моделі поглибленого навчання, де концептуальна і процедурна знання розвиваються паралельно і взаємно підтримують одне одного.

**Висновки.** Алгебра кватерніонів Гамільтона займає унікальне місце у системі математичних дисциплін для підготовки магістрів предметної спеціальності А4.04 «Середня освіта (Математика)»: вона є водночас глибоким об'єктом некомутативної алгебри і незамінним інструментом сучасного комп'ютерного зору. Показано, що поняття тіла  $\mathbb{H}$ , подвійного накриття  $SU(2) \rightarrow SO(3)$ , геодезик на  $S^3$  та кватерніонного добутку мають прямі і практично значущі конкретизації в алгоритмах SLERP, у задачі абсолютної орієнтації Горна, у системі PoseNet, у кватерніонному перетворенні Фур'є та в архітектурі кватерніонних нейронних мереж.

Запропонована п'ятиетапна методична модель, яка від алгебраїчної структури  $\mathbb{H}$  через геометрію обертань і SLERP до оцінки пози і QNN, дозволяє органічно поєднати математичну строгість із технологічною конкретністю. Принципи «вмотивованого введення» (від практичної задачі до теорії) та «трирівневої когерентності» (строге визначення – геометрична інтерпретація – алгоритмічна реалізація) забезпечують ефективне формування як глибоких теоретичних знань, так і здатності до їх практичного застосування.

Методична цінність теми для педагогічних університетів полягає в тому, що вона формує у майбутніх учителів математики наочний приклад «математики в дії»: абстрактна структура, запропонована у 1843 році, через понад 180 років

ISSN 2786-4952 Online

визначає якість алгоритмів у смартфонах, безпілотних системах і системах доповненої реальності. Запропонований підхід може бути реалізований у курсах абстрактної алгебри, диференціальної геометрії, методики навчання математики та дисциплінах на стику математики й інформаційних технологій і слугує підґрунтям для подальших досліджень методики викладання алгебр Кліффорда та геометричного числення у педагогічних університетах.

**Література:**

1. Hamilton W. R. On Quaternions; or on a New System of Imaginaries in Algebra. The London, Edinburgh, And Dublin Philosophical Magazine And Journal Of Science. 1844. S. 3, Vol. 25, No. 169. P. 489–495. <https://doi.org/10.1080/14786444408645047>
2. Kuipers J. B. Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality. Princeton University Press, 1999. 371 p.
3. Shoemake K. Animating Rotation with Quaternion Curves. Proceedings of SIGGRAPH 1985. ACM SIGGRAPH Computer Graphics. 1985. Vol. 19, No. 3. P. 245–254. <https://doi.org/10.1145/325165.325242>
4. Horn B. K. P. Closed-Form Solution of Absolute Orientation Using Unit Quaternions. Journal of the Optical Society of America A. 1987. Vol. 4, No. 4. P. 629–642. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.4.000629>
5. Diebel J. Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. Matrix 58.15-16 (2006). 35 p.
6. Hanson A. J. Visualizing Quaternions. Morgan Kaufmann / Elsevier, 2006. 498 p.
7. Kendall A., Cipolla R. Geometric Loss Functions for Camera Pose Regression with Deep Learning. Proceedings of IEEE CVPR 2017. Honolulu, 2017. P. 5974–5983. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2017.694>
8. Sangwine S. J., Ell T. A. Hypercomplex Fourier Transforms of Color Images. IEEE Transactions on Image Processing. 2007. Vol. 16, No. 1. P. 22–35. <https://doi.org/10.1109/TIP.2006.884955>
9. Parcollet T., Morchid M., Linares G. A Survey of Quaternion Neural Networks. Artificial Intelligence Review. 2020. Vol. 53, No. 4. P. 2957–2982. <https://doi.org/10.1007/s10462-019-09752-1>

**References:**

1. Hamilton, W. R. (1844). On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. The London, Edinburgh, And Dublin Philosophical Magazine And Journal Of Science. S. 3, 25(169), 489–495. <https://doi.org/10.1080/14786444408645047>
2. Kuipers, J. B. (1999). Quaternions and rotation sequences: A primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality. Princeton University Press.
3. Shoemake, K. (1985). Animating rotation with quaternion curves. ACM SIGGRAPH Computer Graphics, 19(3), 245–254. <https://doi.org/10.1145/325165.325242>
4. Horn, B. K. P. (1987). Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions. Journal of the Optical Society of America A, 4(4), 629–642. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.4.000629>
5. Diebel J. Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. Matrix 58.15-16 (2006). 35 p.
6. Hanson, A. J. (2006). Visualizing quaternions. Morgan Kaufmann / Elsevier.
7. Kendall, A., & Cipolla, R. (2017). Geometric loss functions for camera pose regression with deep learning. Proceedings of IEEE CVPR 2017 (pp. 5974–5983). <https://doi.org/10.1109/CVPR.2017.694>

8. Sangwine, S. J., & Ell, T. A. (2007). Hypercomplex Fourier transforms of color images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(1), 22–35. <https://doi.org/10.1109/TIP.2006.884955>
9. Parcollet, T., Morchid, M., & Linares, G. (2020). A survey of quaternion neural networks. *Artificial Intelligence Review*, 53(4), 2957–2982. <https://doi.org/10.1007/s10462-019-09752-1>

*Дата першого надходження статті до видання: 28.04.2026*

*Дата прийняття статті до друку після рецензування: 13.05.2026*