

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана
Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

Завідувач кафедри математики та економіки,

Кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

« ___ » _____ 2025р.

ПРОПЕДЕВТИКА ВИВЧЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДЕЯКИХ
НЕСКІНЧЕННИХ ДОБУТКІВ НА ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИКИ
У ЗАКЛАДАХ ФАХОВОЇ ПЕРЕДВИЩОЇ ОСВІТИ

Спеціальність: 014 Середня освіта (за предметними
спеціальностями)

Предметна спеціальність: 014.04 Середня освіта (Математика)

Додаткова предметна спеціальність: 014.09 Середня освіта
(Інформатика)

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації:

«Магістр середньої освіти. Вчитель математики, вчитель
інформатики»

Автор роботи: Бемба Ігор Михайлович _____

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор

Дільний Володимир Миколайович _____

Дрогобич, 2025

Анотація

У роботі розглянуто особливості пропедевтичного вивчення властивостей деяких нескінченних добутків на заняттях з математики у закладах фахової передвищої освіти. Проаналізовано українські та зарубіжні підходи до викладання теми, охарактеризовано основні властивості нескінченних добутків, їх ознаки збіжності, доступні для ознайомлення студентів на пропедевтичному рівні, та обґрунтовано їх дидактичну цінність. Розглянуто історичні аспекти розвитку теорії нескінченних добутків, факторизацію Вейерштраса, функції на верхній півплощині та добуток Неванлінни-Вейерштраса. Надано приклади використання аналогій з числовими рядами, методів логарифмування та комп'ютерних засобів навчання для формування цілісного уявлення про нескінченні процеси в математиці.

Ключові слова: нескінченний добуток, збіжність, ознаки збіжності, факторизація Вейерштраса, функції на верхній півплощині, добуток Неванлінни-Вейерштраса.

Annotation

The paper considers the features of propaedeutic teaching of the properties of certain infinite products in mathematics classes at institutions of professional pre-higher education. Ukrainian and international approaches to teaching this topic are analyzed, the main properties of infinite products, their convergence criteria, and their didactic value for students at the propaedeutic level are characterized. The historical development of the theory of infinite products, the Weierstrass factorization, functions on the upper half-plane, and the Nevanlinna–Weierstrass product are discussed. Examples of using analogies with numerical series, logarithmic methods, and computer-based tools for forming a holistic understanding of infinite processes in mathematics are provided.

Keywords: infinite product, convergence, convergence criteria, Weierstrass factorization, functions on the upper half-plane, Nevanlinna–Weierstrass product.

Зміст

Вступ	5
Означення та основні властивості деяких добутоків	8
Огляд літератури та основних результатів	15
Основні результати та методичні рекомендації	19
Висновки	33
Список використаних джерел	35

Вступ

Актуальність теми. Роботу присвячено дослідженню особливостей пропедевтичного вивчення властивостей деяких нескінченних добутоків на заняттях з математики у закладах фахової передвищої освіти.

Теорія нескінченних добутоків має численні застосування у математичному аналізі, теорії числових послідовностей, комплексному аналізі, теорії спеціальних функцій та у задачах, пов'язаних із математичною фізикою. Вивчення властивостей нескінченних добутоків здійснювалося у працях класиків математичного аналізу, зокрема Л. Ейлера, К. Вейєрштраса, А. Коші та П. Лежандра. В окремих аспектах пропедевтичне ознайомлення студентів із нескінченними добутками розробляли українські та російські методисти та дослідники математичної освіти, зокрема В. В. Бакун, В. П. Дороговцев та інші, які розглядали можливості введення елементів теорії нескінченних добутоків на доступному рівні у закладах фахової передвищої освіти.

Інтерес до пропедевтики вивчення нескінченних добутоків зумовлений, зокрема, необхідністю формування у студентів цілісного уявлення про нескінченні процеси в математиці та підготовкою до подальшого вивчення математичного аналізу, включаючи ряди, спеціальні функції та складніші добутки. Хоча повне строге математичне обґрунтування деяких властивостей добутоків традиційно розглядається у курсах вищої математики, окремі фундаментальні моменти можна доступно ознайомити на пропедевтичному рівні.

Нескінченні добутки є важливою складовою математичного аналізу, тісно пов'язані з теорією числових послідовностей, нескінченних рядів, елементарних та спеціальних функцій.

Наприклад, гамма-функція чи дзета-функція Рімана можуть бути задані або досліджені за допомогою нескінченних добутків. Водночас складність строгого математичного апарату обмежує можливість повного їх вивчення на рівні фахової передвищої освіти. Проте ознайомлення студентів із поняттям нескінченних добутків на пропедевтичному рівні сприяє формуванню цілісного уявлення про нескінченні процеси в математиці та створює підґрунтя для подальшого вивчення вищої математики.

Об'єкт дослідження - процес навчання математики у закладах фахової передвищої освіти.

Предмет дослідження - пропедевтика вивчення властивостей деяких нескінченних добутків у процесі навчання математики.

Наукова новизна і практичне значення. Ознайомлення студентів із поняттям нескінченних добутків на пропедевтичному рівні дозволяє:

- застосовувати вже відому теорію рядів для дослідження добутків;
- формувати у студентів цілісне уявлення про нескінченні математичні процеси;
- готувати їх до подальшого опанування вищої математики та математичного аналізу;
- використовувати наочні приклади, міжпредметні зв'язки та елементи дослідницької діяльності для підвищення ефективності навчання.

Мета дослідження полягає у вивченні особливостей пропедевтичного введення студентів у властивості нескінченних добутків, визначенні можливостей ознайомлення здобувачів освіти з

елементами їх теорії на доступному рівні та оцінці значення такого ознайомлення для формування математичної підготовки студентів.

Завдання дослідження:

1. Проаналізувати наукову та навчально-методичну літературу з проблеми вивчення нескінченних добутків;
2. Визначити дидактичні умови та принципи пропедевтичного вивчення елементів теорії нескінченних добутків;
3. Охарактеризувати основні властивості деяких нескінченних добутків, доступні для опрацювання у курсі математики закладів фахової передвищої освіти;
4. Обґрунтувати доцільність їх використання у навчальному процесі та підвищення якості математичної освіти.

Означення та основні властивості деяких добутоків

Нескінченні добутки відіграють важливу роль у математичному аналізі, а їх вивчення тісно пов'язане з теорією числових рядів і є природним продовженням понять границі та збіжності.

Означення. Нехай задано послідовність дійсних чисел (a_1, a_2, a_3, \dots) . Нескінченним добутком називають формальний вираз

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

який визначається як границя послідовності часткових добутоків

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n. \quad (2)$$

У загальному випадку множниками нескінченного добутку можуть бути елементи, для яких визначені операція скінченного добутку та поняття збіжності, зокрема дійсні й комплексні числа, функції тощо. Якщо співмножники є числами, то такий добуток називається нескінченим числовим добутком. Це поняття розширює операцію множення подібно до того, як нескінченні суми є узагальненням скінчених сум, і є важливим в математичному аналізі.

Ідеї, що згодом привели до поняття нескінченного добутку, почали з'являтися в працях видатних математиків XVI-XVIII століття, які досліджували нескінченні ряди та аналітичні представлення функцій.

Нескінченний числовий добуток вперше зустрічається у зв'язку із задачею про обчислення числа π . Французький математик Ф. Вієт в XVI столітті отримав формулу:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdots = \frac{2}{\pi} \quad (3)$$

В XVII столітті англійський математик Дж. Валліс отримав формулу:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2}{4n^2 - 1} \right) = \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

Одним із класичних прикладів застосування нескінченних добутків є подання елементарних функцій у вигляді добутків.

Леонард Ейлер у своїй фундаментальній праці *Introductio in analysin infinitorum* (1748) вперше розглянув можливість подання функцій у вигляді нескінченних добутків і отримав формулу для синуса

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 \cdot n^2} \right) \quad (5)$$

У алгебрі будь-який многочлен можна подати як добуток лінійних множників, що відповідають його нулям. Застосувавши аналогічну ідею до цілих функцій (аналітичних на всій \mathbb{R} або \mathbb{C}), можна подати функцію у вигляді нескінченного добутку.

Ідеї Ейлера спиралися більше на інтуїтивні міркування, ніж на строгі доведення, проте вони все ж заклали основу подальшого розвитку теорії нескінченних добутків. Також він вперше розглянув так звану дзета-функцію і отримав її розклад у нескінченний добуток

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1}. \quad (6)$$

Цей розклад іноді приймають за її означення.

Означення. Дзета-функцією Рімана $\zeta(s)$ називають функцію, яка будь-якому дійсному числу s ставить у відповідність суму ряду

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (7)$$

Добуток називається збіжним, коли границя послідовності часткових добутоків існує і не дорівнює нулю. В інших випадках добуток називається розбіжним.

Якщо

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0, \quad (8)$$

то добуток (1) називається розбіжним до нуля.

Відзначимо найпростіші властивості нескінченних добутоків.

1. Якщо нескінченний добуток збігається, то і всі його часткові добутки збігаються. Якщо будь-який частковий добуток збігається, то і сам нескінченний добуток збігається.
2. Якщо нескінченний добуток (1) збігається, то послідовність його часткових добутоків має границю рівну одиниці

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1. \quad (9)$$

3. Якщо нескінченний добуток (1) збігається, то послідовність його залишкових добутоків має границю рівну одиниці.

$$q_n = \prod_{k=1}^{\infty} a_{n+k}, \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1. \quad (11)$$

Інші властивості нескінченних добутоків подібні до властивостей нескінченних рядів. Це дозволяє застосовувати до добутоків уже відому теорію рядів та встановлювати зв'язок між збіжністю нескінченних добутоків і відповідних рядів.

Теорема 1. Необхідною умовою збіжності нескінченного добутку (1.1) є прямування до одиниці його k -го члена при $k \rightarrow \infty$.

Доведення. Нехай нескінченний добуток (1.1) збігається і має значення a , відмінне від нуля. Оскільки

$$\begin{aligned} \prod_n = p_n \prod_{n-1} \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_n = \\ a \neq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

то

$$p_n = \frac{\prod_n}{\prod_{n-1}} \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Виконання умови прямування послідовності співмножників нескінченного добутку до одиниці недостатньо для його збіжності.

Теорема 2 (критерій Коші). Для того, щоб нескінченний добуток (1.1) збігався, необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайшлося таке n_0 , що для усіх $n > n_0$ і усіх $m \geq 0$ виконувалась нерівність

$$\left| \frac{p_{n+m}}{p_n} - 1 \right| < \varepsilon. \quad (14)$$

У навчальному курсі математичного аналізу найчастіше розглядають нескінченні добутки спеціального вигляду

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n), \quad (15)$$

де u_n — деяка послідовність чисел (дійсних або комплексних), $u_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Така форма є найбільш зручною для дослідження збіжності та встановлення зв'язку між нескінченними добутками і числовими рядами. Нескінченний добуток (15) визначається як границя часткових добутків

$$P_N = \prod_{n=1}^N (1 + u_n), \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N \quad (16)$$

Якщо $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = P$ і $P \neq 0$, то кажуть, що добуток збігається і записують

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) = P. \quad (17)$$

Якщо $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = 0$ або межа не існує, добуток розбігається.

Збіжність нескінченних добутків є одним із центральних питань їх теорії та тісно пов'язана з дослідженням числових рядів, саме тому у навчальному курсі математичного аналізу ознаки збіжності нескінченних добутків зазвичай вводяться після розгляду відповідних ознак збіжності числових рядів.

Наведемо необхідну умову збіжності.

Відомо з [13], що якщо нескінченний добуток (15) є збіжним і має ненульову границю, то обов'язково виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (18)$$

Ця умова є необхідною, але не достатньою. Проте вона дозволяє одразу відсіяти нескінченні добутки, які не можуть бути збіжними.

З [12] та [11] відомо, що основною ознакою збіжності нескінченного добутку є таке твердження: за умовами збіжності (за Коші) нескінченний добуток (15) збігається тоді і тільки тоді, коли відповідний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n) \quad (19)$$

є збіжним.

Якщо всі множники нескінченного добутку є додатними, то справедливою є рівність

$$\ln \left(\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n). \quad (20)$$

У цьому випадку нескінченний добуток збігається тоді і лише тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (21)$$

Оскільки при малих u_n має місце наближення $\ln(1 + u_n) \approx u_n$, ця ознака фактично зводиться до попередньої, але є зручною для строгого обґрунтування результатів, що підкреслюється у [5], [6]. Ознака порівняння (аналог ознаки порівняння для числових рядів) як зазначено в [12], формулюється так. Нехай існує така послідовність v_n , що $0 \leq u_n \leq v_n$ для всіх достатньо великих n , і числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (22)$$

є збіжним. Тоді нескінченний добуток (15) також є збіжним.

Питання розбіжності нескінченних добутоків детально розглядається у [3] та сучасних наукових дослідженнях. Зокрема, якщо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (23)$$

є розбіжним і всі $u_n < 0$, то нескінченний добуток (15) або розбігається, або збігається до нуля. У цьому випадку говорять про розбіжність нескінченного добутку у класичному розумінні. Наведена ознака дозволяє встановлювати поведінку добутку без детального обчислення його границі.

Огляд літератури та основних результатів

У XIX столітті, з формуванням строгих основ математичного аналізу, К. Вейерштрасс та О. Коші зробили значний внесок у процес розвитку теорії нескінченних добутків.

О. Коші заклав основи формального підходу до нескінченних добутків і встановив критерії їх збіжності, а Вейерштрасс, ввів елементарні множники Вейерштрасса для побудови цілих функцій із заданими нулями, а також оцінку росту таких добутків, що дозволило строго контролювати збіжність і ріст нескінченних добутків у комплексному аналізі.

Використання множників вигляду $(1 - \frac{x}{a_n})$ у процесі побудови цілих функцій на комплексній площині із наперед заданими нулями, може призводити до розбіжних добутків. Для усунення цієї проблеми К. Вейерштрасс запропонував спеціальні елементарні множники

$$E_p(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right), p \in \mathbb{N}_0 \quad (24)$$

Формула факторизації Вейерштрасса дозволяє будь-яку функцію з нулями a_1, a_2, \dots записати як:

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{a_n}\right) \quad (25)$$

Де $E_p(z)$ - спеціальні добутки для забезпечення збіжності, а послідовність p_n добирається так, щоб добуток був збіжним.

Формула факторизації Вейерштрасса справджується для цілих функцій (функцій, аналітичних на всій комплексній площині).

У працях кінця XIX - початку XX століття нескінченні добутки активно застосовувалися для дослідження гамма-функції, дзета-функції Рімана та інших фундаментальних об'єктів математичного аналізу. Відомо з [5], що класичні дослідження Л. Ейлера, К. Вейєрштраса, А. Коші та П. Лежандра довели значущість нескінченних добутків як інструменту аналітичних побудов. Подальший розвиток цих ідей відображено у [9].

У XX столітті, згідно з оглядовими працями з математичного аналізу та операторної теорії [7], сфера застосування нескінченних добутків значно розширилася: вони почали відігравати важливу роль у функціональному аналізі, теорії ймовірностей, математичній фізиці та операторній теорії. З'явилися дослідження, присвячені нескінченним добуткам операторів, умовам їх збіжності та застосуванню в задачах моделювання і спектрального аналізу [1].

Сучасний етап розвитку теорії нескінченних добутків характеризується інтеграцією класичних результатів із чисельними методами та комп'ютерними обчисленнями. У наукових працях XXI століття розглядаються питання ефективного обчислення нескінченних добутків, а також їх застосування в теорії чисел і прикладних задачах, що детально висвітлено в [5].

Одночасно зростає інтерес до дидактичного аспекту: пропедевтичне ознайомлення студентів із властивостями нескінченних добутків на рівні закладів фахової передвищої освіти розглядали українські та російські методисти і дослідники математичної освіти, зокрема В. В. Бакун, В. П. Дороговцев та інші. Вони підкреслювали доцільність поетапного введення елементів теорії нескінченних добутків через аналогії з числовими рядами,

використання наочності, прикладів та елементів дослідницької діяльності, що дозволяє адаптувати складний аналітичний матеріал до рівня студентів та формує у них цілісне уявлення про нескінченні процеси в математиці.

Підходи до викладання теми нескінченних добутків в українській та зарубіжній педагогічній практиці, згідно проаналізованої науково-методичної літератури, мають як спільні риси, так і певні відмінності, зумовлені рівнем математичної підготовки студентів та цілями навчання.

В українських закладах освіти тема нескінченних добутків традиційно розглядається в межах курсу математичного аналізу після вивчення числових рядів. Така послідовність забезпечує логічний перехід від адитивних нескінченних процесів до мультиплікативних, що сприяє кращому розумінню поняття збіжності. У навчальних посібниках і методичних матеріалах [10], [11] основна увага приділяється означенню нескінченних добутків, необхідним і достатнім умовам їх збіжності, а також типовим прикладам, орієнтованим на аналітичні обчислення.

Для української методичної традиції характерним є формально-аналітичний підхід, за якого акцент робиться на строгих означеннях, доведеннях основних тверджень та використанні класичних ознак збіжності. Водночас сучасні навчальні матеріали такі як, [13] все частіше містять рекомендації щодо пропедевтичного введення теми, зокрема через порівняння нескінченних добутків із числовими рядами та застосування логарифмування як універсального методу дослідження.

Зарубіжні підходи до викладання теми нескінченних добутоків, характеризуються більш інтуїтивно-орієнтованою та прикладною спрямованістю. У сучасних підручниках і монографіях значна увага приділяється мотивації введення нескінченних добутоків, історичним екскурсам та прикладам застосування в теорії чисел, комплексному аналізі й математичній фізиці.

У зарубіжній педагогічній практиці поширеним є підхід, за якого нескінченні добутки розглядаються через їх зв'язок із нулями аналітичних функцій та спеціальними функціями. Такий підхід дозволяє студентам усвідомити глибинний зміст теми та її роль у сучасній математиці ще на початкових етапах навчання аналізу.

Окрему увагу в зарубіжних джерелах [5], [7] приділено використанню комп'ютерних технологій та візуалізації. Чисельне обчислення часткових добутоків, графічне дослідження їх поведінки та експериментальне встановлення характеру збіжності широко застосовуються як дидактичні засоби, що підвищують пізнавальну активність студентів .

Отже, можна зробити висновок, що ефективно викладання теми нескінченних добутоків у закладах фахової передвищої освіти доцільно будувати на поєднанні строгості класичної математичної школи та прикладної спрямованості сучасних зарубіжних методик. Такий інтегрований підхід сприяє формуванню цілісного уявлення про нескінченні добутки та їх роль у математичному аналізі.

Основні результати та методичні рекомендації

Розглянемо верхню півплощину $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$. Побудуємо аналітичну функцію в \mathbb{C}^+ з наперед заданими нулями $\{z_n\} \subset \mathbb{C}^+$. Існують істотні відмінності цього процесу з побудовою добутку Вейерштрасса для цілої площини, оскільки у півплощині важливо контролювати граничні значення на межі (тобто дійсній осі) та гармонічну міру, а не лише локальну збіжність.

Нехай $\{z_n\} \subset \mathbb{C}^+$ - послідовність, що задовольняє умову Бляшке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Im}z_n}{|z_n|^2 + 1} < +\infty \quad (26)$$

Визначимо добуток Бляшке у верхній підмножині

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - z_n}{z - \bar{z}_n}. \quad (27)$$

Зазначимо, що умова Бляшке легко трансформується для інших півплощин. Наприклад, ця умова для випадку правої півплощини $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z > 0\}$.

Відзначимо базові властивості добутків Бляшке:

1. $B(z)$ аналітична і обмежена в \mathbb{C}^+
2. $|B(x)| = 1$ майже всюди на \mathbb{R} в розумінні граничних значень на межі півмножини.
3. Нулі функції B є в точках послідовності (z_n) і тільки в цих точках.

Внаслідок цих властивостей добутки Бляшке корисні для опису властивостей обмежених у півмножині функцій.

Для необмежених функцій вводять канонічні добутки для півплощини

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp\left(\frac{z}{z_n} \mathcal{X}|z_n|\right), \quad (28)$$

де функцію \mathcal{X} вибирають для збіжності в півплощині. Розглянемо одну конкретизацію цього добутку.

Нехай (λ_n) – послідовність точок із $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, тоді визначимо функції

$$S(r) = \sum_{1 < |\lambda_n| \leq r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right) \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|}, \quad (29)$$

та

$$\Pi^*(z) = \prod_{|\lambda_n| \leq 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \lambda_n} \times \prod_{|\lambda_n| \leq 1} \frac{z - z/\lambda_n}{z + z/\bar{\lambda}_n} \exp\left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z}{\bar{\lambda}_n}\right) \quad (30)$$

відповідний добуток Неванлінни-Вейерштрасса. Коли виконуються умови

$$\sum_{|\lambda_n| \leq 1} \operatorname{Re} \lambda_n < +\infty, \quad (31)$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left(S(r) - \frac{\sigma}{\pi} \ln r\right) < +\infty, \quad (32)$$

то добуток Π^* збігається абсолютно і рівномірно на кожному компактні із \mathbb{C}_+ , функція Π^* має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення $\Pi^*(iy)$, рівні по модулю і виконується оцінка

$$|\Pi^*(z)| \leq c_1 \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} x \ln r + c_1 x\right), z = x + iy = r e^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+. \quad (33)$$

При додатковій умові

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{1 < |\lambda_n| \leq r} \cos \arg \lambda_n}{r} < +\infty \quad (34)$$

доведено, що

$$|\Pi^*(z)| \leq c_2 \exp(2x S_0(r) + c_2 x), z \in \mathbb{C}_+, \quad (35)$$

де

$$S_0(r) = \sum_{1 < |\lambda_n| \leq r} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2}. \quad (36)$$

У процесі дослідження окремих рівнянь типу згортки виникає необхідність отримання додаткових верхніх і нижніх оцінок добутоків Неванлінни–Вейерштрасса в околі дійсної півосі.

Теорема 3. Нехай (λ_n) – послідовність точок із \mathbb{C}_+ , для якої виконується умова (31) і

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(S(r) - \frac{\sigma}{\pi} \ln r \right) = -\infty. \quad (37)$$

Тоді рівномірно по y на кожному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln |\Pi^*(x + iy)|}{x} - \frac{\sigma}{\pi} \ln x \right) = -\infty. \quad (38)$$

Застосувавши опис повних мір в термінології А. Грішина, отримаємо

Нехай $H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, - простір функцій, аналітичних у \mathbb{C}_+ , для яких $\|f\| < +\infty$, де норма визначається рівністю

$$\|f\| = \max_{z \in \mathbb{C}_+} \{|f(z)|e^{-\sigma|\operatorname{Im}z|}\}. \quad (39)$$

Функції з цього простору мають на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення $f(iy)$ і при цьому $f(iy) \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Наступна Лема є частинним випадком результату з [8].

Лема. Нехай послідовність λ_n із \mathbb{C}_+ і функція $f: \partial\mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ задовільняють умови (31),

$$\ln|f(iy)| \in L^1(-1; 1), f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad (40)$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} (S(r) - K_f(r)) < +\infty, \quad (41)$$

де

$$K_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln|f(it)| dt. \quad (42)$$

Тоді функція

$$f(z) = \Pi^*(z) \exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(tz + i)^2}{(1 + t^2)^2 (t + iz)} \ln|f(it)| dt \right\} \quad (43)$$

Задовольняє умову

$$(\exists c \in [0; +\infty)) : f(z)e^{-cz} \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+), \quad (44)$$

А останній інтеграл збігається абсолютно і рівномірно на кожному компактні із \mathbb{C}_+ .

Доведення теореми 3. З рівності (37) випливає існування такої функції $\eta: [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, що $\eta(r) \geq S(r) - \frac{\sigma}{\pi} \ln r$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \eta(r) = -\infty$,

причому без обмеження загальності можна вважати, що функція η є спадною, неперервною і функція $r\eta(r)$ є опуклою вниз на $[1; +\infty)$. Тоді визначимо функцію η_1 як $\eta_1(k) = \eta(k) - \eta(1)$, $k \in \mathbb{N}$ а на кожному проміжку $(k; k + 1)$ продовжимо її лінійно з кінців відрізка. Отже функція η_1 є спадною, неперервною, кусково- диференційовною на $[1; +\infty)$, $\eta_1(r) \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow +\infty$ і $\eta_1(r) = 0$.

Тоді знайдеться функція $f_1: \partial\mathbb{C}_+(-i; i) \rightarrow [1; +\infty)$, $f_1(iy) = f_1(-iy)$, $y \in \mathbb{R}$, що

$$\frac{1}{2\pi} \int_{1 < |t| \leq r} \frac{1}{t^2} \ln f_1(it) dt = -\eta_1(r). \quad (45)$$

Оскільки $(-\eta_1(r)r)' = -\eta_1'(r)r - \eta_1(r) < c$ для деякого $c > 0$ при всіх $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, то $-\eta_1'(r) < c/r$ і звідси $f_1(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^\infty(\mathbb{R})$. З умови (44) маємо

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} K_{f_1}(r) = +\infty, \quad (46)$$

Якщо припустити протилежне, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{1 < |t| \leq r} \frac{1}{t^2} \ln f_1(it) dt = c_3, \quad (47)$$

де c_3 від $r \in [1; +\infty)$ не залежить, що суперечить (45). Розглянемо функцію

$$\begin{aligned} & f_2(z) \\ &= \Pi^*(z) e^{-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} \exp \left\{ -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(tz + i)^2}{(1 + t^2)^2 (t + iz)} \ln f_1(it) dt \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Вона задовільняє умови леми, для функції f_2 виконуються умови (40) і $\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(S(r) - \frac{\sigma}{\pi} \ln r + K_{f_3}(r) \right) < +\infty$, отже для f_2

виконується умова (41). Тому

$$(\exists c \in [0; +\infty)) : f_2(z) e^{-cz} \in H_\sigma^\infty(\mathbb{C}_+). \quad (49)$$

Оскільки

$$\Pi^*(z) = f_2(z) e^{\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z} f_3(z) \quad (50)$$

де

$$f_3(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(tz + i)^2}{(1 + t^2)^2 (t + iz)} \ln f_1(it) dt \right\} \quad (51)$$

з (31) випливає, що

$$f_4(z) = \prod_{|\lambda_n| \leq 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \bar{\lambda}_n} \quad (52)$$

Збігається в \mathbb{C}_+ і $|f_4(z)| \leq 1, z \in \mathbb{C}_+$. Щоб довести (38) тоді достатньо показати, що

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f_3(x + iy)|}{x} = -\infty \quad (53)$$

Рівномірно по y на кожному відрізку $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Оскільки

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\pi i} \frac{(tz + i)^2}{(1 + t^2)^2 (t + iz)} \right\} = \frac{-t^2 x^3 + 2t^2 x + x + 2t^3 xy - t^2 xy^2}{\pi(t^2 + 1)^2((t - y)^2 + x^2)},$$

$$z = x + iy$$

Врахувавши, що на \mathbb{R} $f_1(it) = |f_3(it)|$, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\ln|f_3(x+iy)|}{x} &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 x^2}{\pi(t^2+1)^2((t-y)^2+x^2)} \ln|f_3(it)| dt + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2+2t^3y-t^2y^2}{\pi(t^2+1)^2((t-y)^2+x^2)} \ln|f_3(it)| dt = -I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Але, оскільки $|f_3(it)| \leq ce^{\sigma|t|}$, то

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2t^2}{\pi(t^2+1)^2((t-y)^2+x^2)} \sigma|t| dt + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3|y|}{\pi(t^2+1)^2((t-y)^2+x^2)} \sigma|t| dt \leq \\ &\leq \frac{2\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|}{\pi(t^2+1)^2((t-y)^2+x^2)} dt + \frac{2|y|\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t-y)^2+x^2} dt \leq \\ &\leq c_5 + c_6|y|, \end{aligned}$$

де c_5 та c_6 від $x > 1$ та y не залежить. До того ж,

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \int_{1<|t|\leq x} \frac{t^2 x^2}{\pi(t^2+1)^2((t-y)^2+x^2)} \ln|f_3(it)| dt \geq \\ &\geq \int_{1<|t|\leq x} \frac{t^2 x^2}{\pi(t^2+1)^2((x+|y|)^2+x^2)} \ln|f_3(it)| dt \geq \\ &\geq c_7 \frac{1}{4\pi} \int_{1<|t|\leq x} \frac{1}{t^2} \ln|f_3(it)| dt \geq \\ &\geq c_7 \frac{1}{4\pi} \int_{1<|t|\leq x} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{x^2} \right) \ln|f_3(it)| dt = \frac{c_7}{2} K_{f_3}(x), \end{aligned}$$

$$c_7 = \min \left\{ \frac{x^2}{((x+|y|)^2+x^2)} : y \in [a; b] \right\} > 0 \text{ залежить тільки від } a \text{ та}$$

b . З умови (46) отримуємо рівність (38).

У межах пропедевтичного підходу доцільно розглядати нескінченні добутки не лише як формальний об'єкт математичного аналізу, а й як інструмент, що лежить в основі факторизацій аналітичних функцій. Зокрема, факторизація Вейєрштраса демонструє можливість подання цілих функцій у вигляді нескінченних добутків, що узагальнює властивості елементарних добутків вигляду (15).

Функції на верхній півплощині можна розглядати як демонстрацію застосування вивчених властивостей нескінченних добутків. Вони ілюструють, що умови збіжності, поведінка множників та структура нулів функції безпосередньо впливають на аналітичні властивості відповідних добуткових подань. Це дозволить студентам усвідомити роль нескінченних добутків у побудові й дослідженні аналітичних функцій. Таким чином забезпечується наступність між елементарним вивченням властивостей нескінченних добутків та подальшим опануванням складніших розділів математичного аналізу і комплексної теорії функцій.

Ефективне засвоєння студентами поняття нескінченного добутку та його основних властивостей значною мірою залежить від методично обґрунтованої послідовності введення нового матеріалу. У закладах фахової передвищої освіти доцільно спиратися на вже сформовані у студентів знання про числові послідовності, границі та числові ряди. Як зазначається в [10], така опора на раніше засвоєний матеріал забезпечить поступовий перехід до складніших понять.

Першим етапом методики є актуалізація опорних знань. Варто розпочати з повторення понять границі послідовності, збіжності

числового ряду та умов існування його суми. Відомо з [11, с. 11–23], що встановлення аналогій між різними математичними об'єктами сприяє глибшому розумінню нового матеріалу. Наведемо кілька простих прикладів завдань.

Приклад 1. Знайдіть границю послідовності

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 2. Дослідіть на збіжність числовий ряд

Це p -ряд виду $\sum \frac{1}{n^p}$

Показник $p=2>1$ і за відомою ознакою збіжності p -рядів впливає, що такий ряд є збіжним.

Висновок: ряд збіжний.

Приклад 3. Поясніть, чому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

є розбіжним.

Це гармонічний ряд. Хоча його загальний член прямує до нуля

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

але цього недостатньо для збіжності ряду. Відомо, що гармонічний ряд розбігається (за інтегральною ознакою або ознакою Коші).

Висновок: ряд розбіжний.

Другий етап передбачає введення означення нескінченного добутку через розгляд послідовності часткових добутків.

Наголошується, що нескінченний добуток вважається збіжним, якщо існує скінченна ненульова границя цієї послідовності. Як підкреслюється у [10], [13], на цьому етапі важливо акцентувати увагу студентів на необхідній умові збіжності

та проілюструвати її на простих прикладах і контрприкладі.

Приклад 4. Нехай $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

і необхідна умова також виконується.

Приклад 5. Якщо $u_n = 1$, тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \neq 0.$$

Добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \dots,$$

очевидно розбігатиметься.

Наступним етапом є формування уявлення про зв'язок нескінченних добутків із числовими рядами. Відомо з [5, с. 41–49], що логарифмування нескінченного добутку дозволяє звести дослідження його збіжності до аналізу відповідного числового ряду

Такий підхід дає змогу використовувати вже відомі студентам ознаки збіжності рядів і суттєво зменшує рівень абстрактності нового матеріалу.

Особливу увагу в методиці викладання слід приділити поясненню властивостей нескінченних добутків. Зокрема, доцільно розглядати умови, за яких добуток збігається до нуля, вплив знаків множників на характер збіжності, властивості добутків із додатними множниками, а також порівняння нескінченних добутків між собою. Як зазначається у [11], [5], розкриття цих властивостей бажано супроводжувати наочними прикладами та якісним аналізом поведінки часткових добутків.

Приклад 6. З'ясуйте, як змінюється характер збіжності добутку, якщо деякі множники є меншими за 1.

У нескінченному добутку виду

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n),$$

І для $n \rightarrow \infty$ виконується

$$0 < 1 + u_n < 1,$$

То кожен множник зменшує значення часткового добутку.

Зважаючи на це, можливі три випадки:

- добуток збігається до ненульового числа, якщо множники швидко; прямують до 1;
- добуток збігається до нуля, якщо множники менші за 1 і «відхиляються» від 1 достатньо сильно;
- добуток розбігається, якщо відхилення від 1 є надто великим.

Важливим компонентом методики є використання задач прикладного та дослідницького характеру. Студентам можна запропонувати чисельно обчислити кілька перших часткових добутків і зробити припущення щодо їх граничної поведінки. З [7, с. 14–20] відомо, що такий підхід сприяє розвитку інтуїтивного розуміння збіжності та формуванню дослідницьких умінь.

На етапі узагальнення та систематизації знань доцільно пропонувати завдання, що вимагають аналізу поведінки нескінченних добутків за різних умов, встановлення зв'язку між збіжністю числових рядів і відповідних добутків, а також порівняння різних ознак збіжності. Особливу увагу слід приділяти дослідницьким задачам, у яких студенти самостійно формулюють висновки щодо впливу величини та знаку множників на характер збіжності добутку.

Як показано в [7], використання комп'ютерних середовищ для обчислення та візуалізації часткових добутків, дозволяє підвищити наочність навчального матеріалу та зацікавленість студентів, особливо у закладах фахової передвищої освіти.

Для цього ефективно використовуються:

- GeoGebra — для побудови динамічних графіків часткових добутоків та дослідження збіжності;
- Wolfram Alpha / Mathematica — для аналітичного та чисельного обчислення нескінченних добутоків;
- Python (з бібліотеками NumPy, SymPy, Matplotlib) - для програмної реалізації обчислень, візуалізації та побудови графіків;
- Excel / Google Sheets - для створення таблиць часткових добутоків, автоматичних обчислень та графічного аналізу;
- Desmos - для інтерактивного дослідження послідовностей та рядів, у тому числі через логарифмування добутоків.

За допомогою цифрових інструментів студенти можуть:

- експериментально перевіряти збіжність конкретних нескінченних добутоків;
- досліджувати вплив окремих множників на граничну поведінку добутку;
- візуально спостерігати залежність часткових добутоків від n .

Електронні навчальні ресурси, зокрема відеолекції, інтерактивні конспекти та онлайн-платформи (Khan Academy, Coursera, Moodle), дозволяють індивідуалізувати навчання та закріплювати знання.

Використання цифрових інструментів дозволяє також поєднувати математичний аналіз із інформатикою, що підвищує

мотивацію студентів та демонструє практичну цінність отриманих знань. При цьому важливо, щоб цифрові засоби доповнювали, а не замінювали класичні методи навчання, забезпечуючи баланс між наочно-експериментальним та теоретичним рівнями засвоєння матеріалу.

Висновки

Магістерська робота присвячена дослідженню особливостей пропедевтичного вивчення властивостей деяких нескінченних добутоків у процесі навчання математики у закладах фахової передвищої освіти.

У роботі систематизовано українські та зарубіжні підходи до викладання теми, охарактеризовано основні властивості нескінченних добутоків, ознаки їх збіжності та умови застосування на пропедевтичному рівні. Okремо розглянуто історичні аспекти розвитку теорії нескінченних добутоків, включаючи факторизацію Вейерштраса, яка дозволяє виражати цілісні функції через їх нулі у вигляді нескінченних добутоків, а також функції на верхній півплощині та добуток Неванлінни-Вейерштраса, які ілюструють застосування нескінченних добутоків у комплексному аналізі.

Доведено, що пропедевтичне ознайомлення студентів із поняттям нескінченних добутоків дозволяє ефективно застосовувати відому теорію числових рядів для дослідження добутоків, формувати цілісне уявлення про нескінченні математичні процеси та створювати підґрунтя для подальшого вивчення вищої математики та математичного аналізу. Надано приклади використання аналогій із числовими рядами, методів логарифмування та комп'ютерних засобів навчання для підвищення ефективності навчального процесу.

Розроблено методичні рекомендації щодо організації дослідницьких та прикладних завдань, що сприяють систематизації знань студентів, розвитку їх аналітичного та дослідницького мислення, а також закріпленню ключових понять теорії нескінченних добутоків. Особлива увага приділяється факторизації Вейерштраса,

аналізу функцій на верхній півплощині та використанню добутку Неванлінни-Вейерштраса як прикладів для інтеграції теоретичних знань і практичних навичок.

Результати роботи можуть бути використані для подальших наукових досліджень у сфері математичного аналізу, комплексного аналізу, теорії спеціальних функцій, а також для проведення спецкурсів, лабораторних занять та математичних олімпіад у закладах фахової передвищої освіти.

Список використаних джерел

1. Anderson G. W. A new class of infinite products, and Euler's totient function // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. — 1994. — Vol. 17. — P. 1–12.
2. Bruinier J. H. Infinite products in number theory and geometry [Електронний ресурс]. — 2004. — Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/math/0404427> (дата звернення: 16.12.2025).
3. Dilcher K., Vignat C. Infinite products involving Dirichlet characters and cyclotomic polynomials // *Journal of Number Theory*. — 2018. — Vol. 183. — P. 46–62.
4. Euler L. *Introductio in analysin infinitorum*. — Lausanne : Marcum-Michaelem Bousquet, 1748. — Vol. 1–2.
5. Little C. H. C., Teo K. L., van Brunt B. *An Introduction to Infinite Products*. — Cham : Springer, 2022. — 280 p.
6. Melnikov Y. A. *Green's Functions and Infinite Products*. — Boston : Birkhäuser, 2011. — 404 p.
7. Reich S., Zaslavski A. J. Infinite products of operators and their applications [Електронний ресурс]. — 2018. — Режим доступу: <https://arxiv.org/abs/1801.09160> (дата звернення: 16.12.2025).
8. Vynnytskyi B. V., Sharan V. L. On the factorization of one class of functions analytic in the half-plane // *Matematychni Studii*. — 2000. — Vol. 14, No. 1. — P. 41–48.
9. Whittaker E. T., Watson G. N. *A Course of Modern Analysis*. — Cambridge : Cambridge University Press, 1996. — 620 p.
10. Бакун В. В. *Математичний аналіз : навч. посіб. Ч. 3*. — Запоріжжя : ЗНУ, 2021. — 312 с.

11. Грищенко О. Ю. Математичний аналіз. Нескінченні ряди та добутки : навч. матеріали. — Київ : КНУ ім. Тараса Шевченка, 2018.
12. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : підручник. — Київ : Либідь, 1993. — 320 с.
13. Жук О. М., Дрозд О. В. Числові ряди та нескінченні добутки : метод. вказівки до вивчення курсу матем. аналізу. — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. — 48 с.