Міністерство освіти і науки України

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

Факультет фізики, математики, економіки та інноваційних технологій

Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат педагогічних наук, доцент

_______ Тарас ВІЙЧУК «___»________ 2025 р.

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Спеціальність: 014 «Середня освіта (за предметними спеціальностями)»

Предметна спеціальність: 014.04 «Середня освіта (Математика)»

Додаткова предметна спеціальність: 014.09 «Середня освіта (Інформатика)»

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації «Магістр середньої освіти. Вчитель математики, вчитель інформатики»

Автор роботи – **Амзаєв Фазил Недімович** __________

(підпис)

Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук,

доцент **Комарницька Леся Іванівна** _____________

(підпис)

Дрогобич, 2025

Захист магістерської роботи

Методичні особливості вивчення координат і векторів у шкільному курсі математики

Оцінка за стобальною шкалою: ______________________________

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _________________

Короткa мотивація захисту:

____

____

____

____

____

____

____

____

_____________ Голова ЕК ____________ ____________________

дата підпис власне ім’я та прізвище

Секретар ЕК ____________ ____________________

підпис власне ім’я та прізвище

Анотація. Амзаєв Фазил. Методичні особливості вивчення координат і векторів у шкільному курсі математики

Магістерська робота присвячена методиці вивчення координат і векторів у шкільному курсі математики з акцентом на забезпечення практичної орієнтації навчання. У першому розділі розглянуто теоретичні основи вивчення теми, проаналізовано ключове призначення освітнього стандарту, опрацьовано дидактичну та методичну літературу, а також проведено критичний аналіз наявних підручників щодо включення прикладних задач та їхньої ефективності. Другий розділ присвячено обґрунтуванню необхідності та шляхам забезпечення практичної компетентності учнів. Здійснено аналіз застосування сучасних інтерактивних технологій, зокрема універсальних інструментів, таких як GeoGebra. На основі виявлених обмежень та важливості встановлення міжпредметних зв’язків сформульовано потребу в розробці спеціалізованого навчального додатку для опанування теми «Координати та вектори». Розглянуто труднощі засвоєння теми та запропоновано ефективні підходи до їх вирішення шляхом створення інтерактивного додатку «Координати і вектори наочно». Ефективність додатку була експериментально перевірена в умовах педагогічної практики, а результати перевірки підтвердили високу дидактичну цінність та практичну спрямованість запропонованої методики.

Abstract. Amzaev Fazil. Methodological features of studying coordinates and vectors in the school mathematics course

The Master's Thesis is dedicated to the methodology of teaching coordinates and vectors in the school mathematics curriculum, with a focus on ensuring the practical orientation of the learning process. The first chapter reviews the theoretical foundations for studying the topic, analyzes the key purpose of the educational standard, examines didactic and methodological literature, and provides a critical analysis of existing textbooks regarding the inclusion and effectiveness of applied problems. The second chapter is devoted to substantiating the necessity and defining the ways to ensure the practical competence of students. An analysis is conducted on the effectiveness of applying modern interactive technologies, including universal tools such as GeoGebra. Based on the identified limitations and the importance of establishing interdisciplinary connections, the need for the development of a specialized educational application for mastering the topic "Coordinates and Vectors" is formulated. The difficulties in mastering the topic are considered, and effective approaches to their solution are proposed through the creation of the Interactive Application "Coordinates and Vectors Visually". The effectiveness of the application was experimentally verified during teaching practice, and the results of the verification confirmed the high didactic value and practical focus of the proposed methodology.

Зміст

ВСТУП

Одним з найважливіших показників якості математичної освіти є практична компетентність. Вона, без сумніву, відображає готовність особистості до реального життя, до багатьох видів суспільної діяльності, а також до опанування професійною освітою. Тому прикладна складова шкільного курсу математики, та й взагалі шкільного навчання, є вкрай актуальною проблемою в навчанні математики.

Вирішальним фактором у подоланні цієї проблеми є активна реалізація прикладної спрямованості освітнього процесу. Центральне місце тут посідають прикладні задачі та ефективне застосування до них математичного моделювання. Однак, не менш критично важливими для формування компетентностей у навчанні математики є такі аспекти: налагодження міжпредметних зв’язків та впровадження інформаційно-технологічних засобів.

Вивчення координат і векторів є невід’ємною частиною курсу геометрії та алгебри. Їх розуміння та застосування допомагає не лише розв’язувати абстрактні задачі, а й вирішувати реальні прикладні проблеми в навігації, фізиці, інженерії та інших галузях. Однак часто учні сприймають ці теми як суто теоретичні, що ускладнює процес їхнього засвоєння.

Стандартні підходи до навчання часто обмежуються формальними означеннями та алгоритмічними методами розв’язання задач. Включення прикладних задач, які ілюструють використання координат та векторів у реальному житті, може значно підвищити інтерес учнів до навчального процесу.

Актуальність дослідження обумовлюється необхідністю вдосконалення методики навчання координат і векторів у шкільному курсі математики. Сучасні освітні парадигми, які акцентують на інтерактивності, диференціації та формуванні компетентностей, вимагають перегляду традиційних методик викладання математики. У зв’язку з цим, питання методичної оптимізації вивчення координат і векторів набуває особливої значущості і потребує систематичного дослідження для створення методичних рішень, що відповідають актуальним освітнім тенденціям.

Об’єктом дослідження є процес навчання теми «Координати і вектори» у шкільному курсі математики.

Предметом цього дослідження є можливість підвищення засвоюваності теми «Координати і вектори» в шкільному курсі математики шляхом приділення особливої уваги її практичному застосуванню. У дослідженні буде розглянуто, як впровадження прикладних задач сприяє кращому розумінню матеріалу та формуванню стійких математичних навичок.

Метою цього дослідження є розробка ефективного методичного підходу до вивчення координат і векторів у шкільному курсі математики через використання прикладних задач. Дослідження спрямоване на підвищення зацікавленості учнів та покращення їхніх навичок застосування математичних понять у реальних умовах.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати **завдання**:

1. Проаналізувати науково-методичну літературу з питань прикладної спрямованості шкільного курсу математики.
2. Проаналізувати науково-методичну літературу з питань викладання координат і векторів.
3. Проаналізувати підручники щодо викладу даної теми.
4. Розробити методичні рекомендації щодо прикладної спрямованості при вивченні цієї теми.
5. Розробка інтерактивного додатку, який міститиме:

   а) Теоретичний матеріал щодо координат і векторів.

   б) Реальні приклади застосування цих тем у житті.
6. Експериментальна перевірка запропонованих методичних рекомендацій.

Наукова новизна дослідження полягає у розробці методичних підходів до прикладного вивчення координат та векторів, що ґрунтуються на використанні сучасних освітніх технологій, зокрема інтерактивних методів навчання та застосування цифрових ресурсів.

У процесі дослідження будуть використані наступні **методи**:

- теоретичний аналіз і узагальнення науково-методичної літератури;
- аналіз навчальних програм і підручників;
- експериментальне навчання;
- анкетування та опитування учнів і вчителів;
- статистична обробка отриманих результатів.

Дослідження призведе до вдосконалення методики викладання координат і векторів у шкільному курсі математики, що, у свою чергу, забезпечить підвищення рівня практичного опанування учнями даного матеріалу та підвищення загальної математичної компетентності.

Результати дослідження доповідалися на міжнародній науково-практичній студентсько-викладацькій конференції «Актуальні проблеми сучасної науки» у Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка, яка проходила 6-7 травня 2025 р. [1].

РОЗДІЛ І. Аналіз літератури по темі дослідження

1.1. Ключове призначення освітнього стандарту

Володіння математичними прийомами та навичками їхнього практичного застосування є обов'язковою умовою для успішної участі у сучасному суспільному житті. Ця готовність використовувати математику є критично важливою для вивчення більшості предметів у школі, а також висувається як значна вимога сучасним ринком праці, здобуттям професійної освіти та подальшим навчанням. Тому основним завданням цього курсу є забезпечення умов, необхідних для формування в учнів практичної компетентності [2].

Для забезпечення практичної компетентності випускник загальноосвітнього навчального закладу повинен:

- будувати і всебічно досліджувати найпростіші математичні моделі, що відображають сутність реальних об'єктів, процесів і явищ; при цьому ефективно використовувати відповідний математичний апарат та об'єкти для розв'язання задач, пов'язаних із цими моделями;
- ефективно оперувати інформацією, необхідною для точної постановки математичної задачі, її характеру й особливостей; уміти уточнювати вихідні дані та мету; знаходити додаткові відомості та засоби вирішення; здійснювати переформулювання та декомпозицію задачі, встановлювати між елементами зв'язки та складати план розв'язання, вибираючи оптимальні методи. Також зобов'язаний перевіряти правильність, інтерпретувати отриманий результат, оцінювати його придатність та приймати обґрунтовані рішення;
- досконало володіти технікою обчислень, раціонально поєднуючи усні, письмові та інструментальні методи, включаючи наближені обчислення. Також уміти проектувати і здійснювати алгоритмічну та евристичну діяльність, працюючи з математичним матеріалом.
- вільно працювати з формулами, що включає розуміння змістового значення кожного елемента, знаходження їх числових значень при заданих змінних, а також уміння виражати одну змінну через інші

тощо. Крім того, уміти читати, будувати та досліджувати властивості графіків функціональних залежностей;

- уміти повноцінно працювати з геометричними об'єктами як на площині, так і у просторі: класифікувати, конструювати і встановлювати властивості фігур, зображати їх елементи та виконувати побудови на кресленнях. Крім того, зобов'язаний вимірювати ключові геометричні величини (відстані, кути) і знаходити кількісні характеристики фігур (площі та об'єми);
- застосовувати основи ймовірнісно-статистичного мислення, а саме: оцінювати шанси настання різних подій, визначати міру ризику при виборі стратегії, а також обирати найбільш оптимальне рішення на основі проведеного аналізу.

Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, а також природничої підготовки молоді. Вона певною мірою свідчить про готовність молоді до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння професійною освітою.

Ключовою метою викладання математики є формування навичок її практичного застосування. Радикальним і найбільш ефективним інструментом для реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу є широке, систематичне використання методу математичного моделювання протягом усього навчання. Цей підхід повинен пронизувати всі аспекти: від введення нових понять, ілюстрацій та доведень до системи вправ і контролю. По суті, мета полягає в тому, щоб навчити учнів застосовувати математику. Така прикладна орієнтація, своєю чергою значно посилює стійкі мотиви до вивчення математики та навчання загалом.

Встановлення природних міжпредметних зв'язків математики з іншими дисциплінами, передусім природничими, є одним із найважливіших засобів забезпечення прикладної спрямованості навчання. Особливої уваги вимагає налагодження тісних, взаємовигідних зв'язків між математикою та інформатикою, оскільки ці дві освітні галузі визначають підготовку особистості до життя в постіндустріальному інформаційному суспільстві. Широке застосування комп'ютерів у викладанні математики є доцільним для проведення математичних експериментів, організації практичних занять, інформаційного забезпечення, візуального інтерпретування математичної діяльності та досліджень [2].

1.2. Аналіз дидактичної, психологічної та методичної літератури по темі дослідження

Серед багатьох факторів, що впливають на ефективність навчання математики, пріоритет належить психологічним та педагогічним. Слід наголосити, що психологічні чинники становлять фундамент для педагогічних і є їхнім ключовим регулятором.

Психологічні чинники, що впливають на ефективність навчання, охоплюють суб'єктні характеристики учнів (їхні індивідуальні й вікові особливості, включаючи сприймання, пам'ять, мислення, уяву, увагу, а також вольові та емоційні процеси), об'єктні характеристики (психологічна специфіка змісту навчального матеріалу) та процесуальну складову – психологію педагогічної взаємодії в системі навчання.

Методика математики тісно пов'язана з психологією. Психологія – це основа методики, без неї методика стає безпредметною. Адже не можна говорити про раціональні методи навчання учнів, не знаючи їх психологічних особливостей: як вони сприймають, запам'ятовують, думають, пригадують, що їх цікавить, що стомлює. Будь-яка спроба розв'язати те або інше конкретне питання методики математики без урахування відомостей з психології приречена на невдачу [3].

Існує тісний зв'язок між методикою математики та педагогічною дидактикою. Дидактика досліджує цілі, зміст і методи навчання для всіх шкільних предметів у цілому. Методика математики, своєю чергою, вивчає аналогічні питання, але вже у вужчому контексті, пристосовуючи їх до специфіки викладання математики (що можна назвати дидактикою математики). Водночас, ці вузькоспеціалізовані назви не фігурують в офіційних документах.

Проблема оптимізації навчальної діяльності учнів має значне вирішення у вітчизняній психології. Цей досвід охоплює такі ключові напрями: розробка теорії поетапного формування розумових дій, створення концепції розвитку теоретичного мислення [4], вивчення системного та планомірного формування прийомів розумової діяльності [3], дослідження умов розвитку особистості, а також підходи до формування учня як суб'єкта пізнавальної діяльності [4] та інші фундаментальні роботи.

Аналіз психолого-педагогічних засобів навчання математики показує, що методичні прийоми організації засвоєння ключових понять, передбачених програмою, недостатньо розроблені або є неадекватними їхньому змісту. Відтак, проблема нашого дослідження полягає в необхідності розробки таких прийомів, які гарантуватимуть глибоке та повноцінне засвоєння учнями основних математичних концепцій, зокрема в темі «Координати та вектори».

У психологічній науці проблема засвоєння знань була і залишається предметом інтенсивного вивчення в межах різних наукових напрямків [3].

Ефективне засвоєння теоретичних понять теми «Координати та вектори» можливе лише за умови повноцінної навчальної діяльності, сфокусованої на теоретичних знаннях. Важливо, щоб активність учня була спрямована не тільки на фінальний результат, а й на оволодіння універсальними способами дій, що дозволяють досягти цього результату.

Ці дії узагальнюються та набувають форми теоретичного поняття як елемента наукового знання. Визначальним фактором успішності засвоєння цього способу дій є тип розв'язуваної задачі (навчальна чи практична).

Формування справді наукових понять – основної мети шкільного навчання – вимагає аналізу умов їхнього предметно-матеріального походження. Це забезпечує засвоєння понять на теоретично-генетичному рівні. Відповідно, при введенні понять декартової системи координат і векторів доцільно зосередитися на поясненні необхідності їхнього впровадження та використання відповідних прикладів для усвідомлення.

Ключем для сприйняття математичної моделі є розуміння її генезису (процесу побудови). Необхідно, щоб учень, аналізуючи модель, досягав глибокого розуміння того, що саме вона відображає. Унаочнене сприйняття передбачає активну роботу мислення, використання набутих знань та досвіду. Зважаючи на те, що моделі стимулюють активне оперування поняттями, при вивченні «Координат та векторів» доцільно систематично використовувати життєві приклади, зокрема ті, що базуються на об'єктах навколишнього середовища. Цей підхід є виправданим, оскільки моделювання вимагає творчої активності, розвиває творче математичне мислення і забезпечує краще усвідомлення навчального матеріалу.

Теоретичний аналіз психологічної літератури дав змогу виділити наступні складові діяльності з математичними поняттями: оволодіння значенням поняття, оволодіння способами математичних дій з ним, моделювання поняття та його відтворення.

З огляду на зростання складності навчальних програм, прискорення темпів та оновлення освітніх технологій, у методиці навчання математики, особливо геометрії, виникла гостра суперечність. Вона полягає у розриві між накопиченим досвідом традиційного навчання і недостатньою ефективністю його використання для вирішення головної сучасної задачі – формування самобутньої та творчої особистості учня, незважаючи на те, що потенційні шляхи для цього вже існують.

Далі розглянемо методичну літературу по темі дослідження.

Вивчення координат починається у школі в 5-6 класах в межах алгебраїчного матеріалу, де вводяться такі поняття, як зображення чисел на прямій, координати точки, прямокутна система на площині (абсциса та ордината). Підручник Погорєлова О.В. [31] відводить координатам центральну роль, знайомлячи учнів із двома важливими формулами: формулою для відстані між двома точками та формулою для знаходження координат середини відрізка за координатами його кінців.

У своїй праці Гриньов Б.В. проаналізував ключові аспекти вивчення векторів: від трактування самого поняття в різних підручниках до виконання операцій і практичного застосування векторів для доведення теорем та розв'язування різноманітних задач [8].

У посібнику підкреслюється, що вектор є одним із фундаментальних понять сучасної математики. Еволюція цього поняття відбувалася завдяки його широкому та активному використанню у різних галузях: математиці, механіці, а також у технічних науках.

Посібник [5] містить ґрунтовний аналіз і всебічне розкриття методичного матеріалу, присвяченого темі «Координати та вектори», що є відмінною основою для нашого дослідження.

Векторний апарат є основою для викладання лінійної алгебри, аналітичної та диференціальної геометрії. Однак, учні вперше знайомляться з поняттям векторної величини у курсі фізики (на прикладі сили), що часто призводить до неправильного уявлення про вектор як виключно фізичне поняття. Насправді ж, вектор – це математична концепція, яка успішно застосовується у фізиці та інших прикладних науках. Його використання дозволяє спростити розгляд деяких питань і розв'язування задач у цих галузях [6].

Згідно з Гриньовим Б.В., векторний апарат широко застосовується вже на початкових уроках фізики у 8 класі. Це актуалізує питання про те, як найбільш природно інтегрувати поняття вектора в шкільний курс математики [8]. Слід зазначити, що методична література пропонує різні підходи до введення цього поняття.

Серед евристик розв'язування задач ключовим є вибір: що доводити засобами геометрії, а що – векторним апаратом. У посібнику подано методичну рекомендацію, згідно з якою векторний метод за рівнем своєї потужності та універсальності співставний з методом складання рівнянь.

У зв'язку з тим, що цей метод є новим для учнів, необхідно:

- мотивувати школярів, демонструючи ефективність методу на спеціально дібраних прикладах;
- формувати навички застосування, навчаючи учнів ключовим евристичним прийомам;
- дотримуватися принципу доступності – починати навчання з простих задач, щоб не відволікати увагу на зайві складності геометричного характеру.

Варто мати на увазі, що векторний метод не є універсальним: його застосування до певних задач недоцільне або неефективне [6].

Для нашого дослідження цей посібник є цінним методичним джерелом, оскільки він вичерпно та детально аналізує методику викладання координат і векторів.

У посібнику [7] викладено основи методики навчання математики в загальноосвітній школі. Важливо наголосити, що в ньому подано вступні зауваження, які розкривають різні методичні підходи до визначення поняття вектора.

Посібник [9] містить детально розроблені та вдалі методичні прийоми для викладання теми «Координати та вектори в просторі», які є корисними для вчителя математики.

Таким чином, на сьогодні існує значний обсяг дидактичної та методичної літератури. В основному, автори методичних посібників [30], [10] пропонують вивчати координати і вектори за допомогою традиційної методики. Водночас деякі дослідники, зокрема автор [11] акцентує увагу на проблемному методі навчання.

Аналіз наукових видань свідчить про те, що для вчителів математики існує значний обсяг літератури, який постійно поповнюється. Проте, існує дефіцит джерел, орієнтованих на нову навчальну програму та чинні підручники. Саме ця невідповідність викликає гостру потребу в розробці оновленої методики, яка б задовольнила сучасні освітні потреби.

,

1.3. Аналіз підручників на наявність прикладних задач при вивченні координат і векторів

Шкільні підручники є невід'ємним складником освітнього процесу. Вони створюються на засадах загальних дидактичних принципів і мають обов'язково відповідати чинним освітнім стандартам та навчальним програмам. До цих дидактичних засад відносять такі ключові принципи:

- науковість: забезпечення достовірності та сучасності знань;
- систематичність і послідовність: логічна побудова теоретичного матеріалу;
- наступність і перспективність: зв'язок між попереднім і майбутнім навчальним досвідом;
- наочність і доступність: забезпечення зрозумілості та сприйняття матеріалу;
- зв'язок теорії з практикою: орієнтація на застосування набутих знань.

Для виконання дидактичних вимог підручники мають містити методичний апарат, функціонал якого спрямований на розвиток змістовних ліній. Цей апарат складається з теоретичної частини та системи завдань, які передбачають: реалізацію внутрішньо предметних і міжпредпетних зв'язків, використання технічних засобів і комп'ютерної підтримки, забезпечення прикладної та практичної спрямованості, а також інші необхідні компоненти [15].

Прикладна спрямованість курсу алгебри та геометрії реалізується у шкільних підручниках насамперед через прикладні задачі. Систематичне розв'язування таких задач на уроках є потужним мотивуючим фактором для учнів, що сприяє не лише вивченню математики й суміжних дисциплін, але й підвищує рівень математичної компетентності (як ключової, так і предметної) та формує науковий світогляд школярів.

Координати та вектори переважно вивчаються в курсі геометрії 9 - 10 класів. У 9-му класі теми координати та вектори вивчаються на площині, а в 10-му – у просторі.

Слід зазначити, що з координатами діти знайомляться ще з 5-го класу. Координатна пряма вводиться при вивченні натуральних та дробових чисел, а також при вивченні додатніх та від’ємних чисел. У 6-7 класах вводиться прямокутна система координат на площині, учні вчаться будувати точки за заданими координатами і навпаки. Ці знання активно використовуються при вивченні функцій та графіків (лінійна функція, парабола тощо). Але, безсумнівно, основне вивчення теми «координати», «координатна площина» та «вектори» починається у 9-му класі.

Тому, надалі ми обмежимося аналізом викладу теми координати та вектори у 9–10 класах.

Для проведення аналізу на наявність прикладних задач при вивченні координат і векторів ми обрали найбільш поширені в шкільній практиці підручники, авторами яких є: Бевз Г.П., Істер О.С., Мерзляк А.Г. та Бурда М.І. Відповідно, буде проведено детальний аналіз цих навчальних посібників, а його результати будуть систематизовані у таблицях для 9-го та 10-го класів.

Таблиця 1.1.

Прикладні задачі на тему координат і векторів у підручниках 9 класу

Тема	Підручник			
	Бевз Г.П. 2017	Істер О.С. 2017	Мерзляк А.Г. 2017	Бурда М.І. 2017
Координати на площині	№78; №111; №131; №134			№43; №75; №122; №123; №169; №170; №212; №277;
Вектори на площині			№14.33; №14:51; №14.52; №16.12;	№320; №386; №387; №388; №442; №443; №444; №491; №492; №493; №1106; №1107.

Аналіз підручників з геометрії для 9 класу показав, що найбільшу увагу прикладній спрямованості у темах «Координати та вектори» приділяють автори Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Прикладні задачі також присутні у посібниках

Бевза Г.П., Бевза В.Г., Владімірової Н.Г. та Мерзляка А.Г., Полонського В.Б., Якіра М.С. Важливо зазначити, що у більшості цих підручників прикладні задачі проілюстровані малюнками і подані у формалізованому вигляді (як готові математичні моделі).

Особливістю підручника Бурди М.І., Тарасенкової Н.А. є наявність задач, що безпосередньо спрямовані на формування в учнів уміння математичного моделювання як методу наукового пізнання. У цих завданнях автори пропонують життєві ситуації, вимагаючи від учня здійснити їхню трансформацію і описати математичною мовою.

Вивчення геометрії та, зокрема, розділу «Координати та вектори» у 10 класі на рівні стандарту відбувається за комплексними підручниками з математики. Ці підручники, як правило, структурно розділені на дві частини: «Алгебра і початки аналізу» та, власне, «Геометрія».

Таблиця 1.2.

Прикладні задачі на тему координат і векторів у підручниках 10 класу

Тема	Підручник			
	Бевз Г.П. 2018	Істер О.С. 2018	Мерзляк А.Г. 2018	Бурда М.І. 2018
Координати і вектори у просторі	№1267; №1348; №1368; №1369; №1375;	№ <u>11.38;</u> <u>№12.34;</u> <u>№13.51;</u> <u>№14.30;</u> <u>№15.19</u>		№844; №845; №846; №847: №882; №883; №884; №912; №913.

У підручнику з математики Істера О.С. для 10 класу введено нову рубрику «Життєва математика». Вона містить задачі, які відображають реальні ситуації з акцентом на економічну грамотність, підприємливість, екологічну безпеку, громадянську відповідальність, здоровий спосіб життя [26]. Проте більшість цих завдань не мають прямого зв’язку з конкретною темою, де вони розміщені (ці нетематичні прикладні задачі позначено у таблиці підкресленням).

Підручник Мерзляка А.Г. демонструє значну диспропорцію між теоретичною ілюстрацією та практичним наповненням: хоча кожне нове поняття ілюструється життєвим прикладом, загальна кількість прикладних задач за весь курс складає лише одну, причому в темі «Координати і вектори у просторі» такі задачі повністю відсутні.

У рубриці «Проявіть компетентність» підручника Бурди М.І. часто представлені завдання, де учням необхідно обґрунтувати реальну життєву ситуацію та пояснити математичний принцип або поняття, що лежить в її основі. Виконання таких завдань ефективно вдосконалює в учнів уміння математичного моделювання.

Практичні завдання у посібнику Бевза Г.П. часто орієнтовані на використання цифрових інструментів (таких як GRAN 3D, GeoGebra). Також у структурі підручника присутні прикладні задачі, які спеціально призначені для систематичного повторення матеріалу, пройденого в попередніх темах.

У всіх підручниках з математики для 10 класу присутні прикладні задачі, які не несуть прямої практичної цінності для розв'язання життєвих проблем. Однак, їхнє ключове призначення полягає в ілюстрації зв'язку між відповідними математичними поняттями та реальними ситуаціями у житті.

Рівень прикладної спрямованості при вивченні координат та векторів прямо корелює з обсягом прикладних задач. Результати порівняльного аналізу показують: лідером за кількістю прикладних завдань є підручник Бурди М.І., де життєві задачі систематизовані в рубриці «Проявіть компетентність». Особливістю підручника Бевза Г.П. є те, що значна частина його прикладних задач подана формалізовано за допомогою рисунків.

Завдання в обох згаданих підручниках виконують подвійну функцію: вони не лише формують навички математичного моделювання, але й сприяють підвищенню практичної компетентності учнів. Крім того, ці посібники містять завдання, які вимагають використання програмних засобів навчального призначення. Це, своєю чергою, відіграє важливу роль у підготовці грамотної сучасної особистості.

РОЗДІЛ ІІ. Шляхи забезпечення практичної орієнтації при вивченні «Координат та векторів»

2.1. Аналіз ефективності застосування сучасних технологій для розвитку учнівських компетентностей при вивченні координат та векторів

Математика традиційно вважається фундаментальною дисципліною, яка завжди була важливою для формування в учнів логічного мислення та аналітичних здібностей [13].

У наш час стрімкого технологічного прогресу з’являються інноваційні можливості для вдосконалення навчального процесу. Це, зокрема, стосується і вивчення теми «Координати та вектори», де технології розкривають новий потенціал для візуалізації та інтерактивної роботи [14].

Комп’ютерні програми, онлайн-ресурси та мобільні додатки є потужними інструментами, які суттєво розширюють можливості вивчення математики. Вони дають змогу візуалізувати абстрактні ідеї, проводити моделювання та математичні експерименти. Інтерактивність, наочність і доступність цих технологій ефективно сприяють розвитку критичного мислення і вмінню розв’язувати проблеми.

Оскільки відсоток засвоєння інформації учнями є низьким через їхню неуважність, застосування новітніх методів навчання є дієвим рішенням. Такі методи дозволяють ефективно концентрувати увагу школярів, підвищуючи їхню залученість на тривалий період, навіть на весь час навчального заняття.

Науково обґрунтовано, що використання сучасних технологій посилює засвоєння математичних концепцій учнями. Технології не лише допомагають краще зрозуміти і запам’ятати матеріал, але й сприяють його практичній реалізації. Інтерактивні інструменти є потужним мотиватором, оскільки забезпечують динамічну візуалізацію в задачах на координати та вектори.

Зміст цього підрозділу сфокусовано на дослідженні впливу сучасних технологій на процес засвоєння учнями теми «Координатита та вектори». Структурно буде розглянуто переваги та потенціальні складнощі застосування технологій, що дозволить нам оцінити їхню ефективність у контексті опанування даного матеріалу.

Якщо раніше вивчення координат і векторів обмежувалося їхнім ручним кресленням на дошці чи в зошитах, то сьогодні сучасні комп'ютерні програми дозволяють учням бачити, як вектори та їхні координати змінюються в динаміці [16].

Мобільні додатки та онлайн-платформи значно підтримують учнів у засвоєнні матеріалу. Вони дозволяють їм автономно (вдома чи поза межами класу) виконувати інтерактивні завдання, розв'язувати задачі та використовувати тести для оперативної самоперевірки, що забезпечує глибше засвоєння теми.

Таким чином, сучасні технології створюють інноваційні підходи до вивчення теми «Координати та вектори», роблячи матеріал захопливішим і доступнішим для учнівського сприйняття.

Перевагами використання сучасних технологій є: інтерактивність та наочність, які дозволяють учням самостійно змінювати параметри і одразу бачити результат на екрані; можливість навчатися у зручний час і в зручному місці завдяки доступу до онлайн-ресурсів; персоналізоване навчання, де комп'ютер може автоматично підбирати завдання відповідно до рівня складності; підвищення мотивації учнів, оскільки цікаві технології спонукають до кращого вивчення предмета; а також розвиток вміння співпрацювати, завдяки можливості спільного виконання завдань у деяких додатках.

Щодо впливу на результати навчання, то відзначаються: покращення розуміння теми «Координати та вектори»; підвищення успішності з математики завдяки кращому засвоєнню матеріалу; розвиток умінь аналізувати, вирішувати задачі та застосовувати знання на практиці; більша самостійність учнів у навчанні; а також підвищення інтересу до вивчення математики.

Необхідно враховувати ризики, пов'язані з надмірним впровадженням технологій. Звикання учнів до готових комп'ютерних моделей та візуалізацій може призвести до пасивного сприйняття інформації, а отже, до зниження здатності до критичного аналізу. Існує також небезпека того, що школярі втратять базові навички самостійної роботи, зокрема, уміння розв'язувати задачі вручну, без використання цифрових інструментів.

Серед додаткових ризиків – когнітивна залежність від пристроїв, коли розуміння та запам'ятовування інформації стає скрутним без технологій. Проблема відволікання також актуальна: надлишок розважальних елементів у деяких додатках може зміщувати фокус уваги учнів. Крім того, нерівномірний доступ до технологій для учнів із сільської місцевості чи малозабезпечених сімей поглиблює освітню нерівність. Не можна ігнорувати й фактор здоров'я, оскільки збільшення часу, проведеного за гаджетами, негативно впливає на фізичний стан і самопочуття школярів.

Покращення навчання математики завдяки сучасним технологіям вимагає комплексного підходу. Передусім, необхідно активізувати використання комп'ютерних програм під час занять для підвищення інтерактивності та наочності. По-друге, критичне значення має підготовка вчителів до роботи з новітніми технологіями, оскільки від цього залежить ефективність їхнього застосування. Також, на нашу думку, варто розробити якісні електронні посібники й додатки, які адаптуються до рівня учнів, забезпечуючи можливість кожному знайти матеріал, що відповідає його здібностям.

Успішність використання технологій залежить від регулярного оновлення програмного забезпечення, що дозволяє учням працювати з актуальними інструментами. Крім того, необхідно досягти розумного балансу між інноваційними та традиційними методиками. Слід пам'ятати, що класичні прийоми, зокрема розв'язування задач вручну, зберігають свою дієвість. Суть полягає у комплексній інтеграції сильних сторін обох підходів.

Оптимізація підходу шляхом врахування цих рекомендацій забезпечить максимальну користь від застосування технологій у викладанні математики, зокрема теми «Координати та вектори». Це позитивно вплине на якість освіти для учнів і професійний розвиток педагогів. Ключовими умовами успіху є належна підготовка викладачів, а також розробка якісних електронних ресурсів, які враховують вікові, індивідуальні та психологічні потреби учнів.

2.2. Аналіз можливостей застосування інтерактивних методів і засобів під час вивчення координат та векторів

Сутність інтерактивного навчання полягає у активному залученні школярів, що відрізняється від пасивного слухання чи читання. Учні безпосередньо беруть участь у дискусіях, розв'язують проблеми, працюють у групових проектах та грають. Використання інтерактивної дошки, програмного забезпечення або онлайн-курсів значно посилює ефективність цього методу [17].

Використання комп'ютерних програм, візуалізацій та ігрових елементів у навчанні є ефективним для вивчення «Координат та векторів» і математики загалом. Ці методи підвищують доступність і зацікавленість, сприяючи швидкому та якіснішому засвоєнню складного матеріалу, що дозволяє збільшити час, присвячений практичним завданням.

Інтерактивні методи та засоби є все більш важливими інструментами у викладанні алгебри та геометрії, зокрема, тих розділів, де необхідна візуалізація. Вони не тільки дають змогу учням активно взаємодіяти з матеріалом, забезпечуючи глибше засвоєння концепцій, але й допомагають педагогам збагачувати навчальний процес, роблячи його більш цікавим і змістовним [17].

До інтерактивних засобів, ефективних при вивченні координат та векторів, належать: інструменти для візуалізації (графічні калькулятори), практичні платформи (віртуальні лабораторії), мультимедійні ресурси (відеоуроки з використанням анімацій) та засоби для закріплення (інтерактивні вправи та завдання).

Інтерактивні графічні калькулятори є потужним інструментом для вивчення координат та векторів. Найбільш відомими серед них є GeoGebra, Wolfram Alpha, SageMath та Maxima. Ці програми дають змогу створювати та маніпулювати векторами, а їхня головна перевага полягає в динамічній візуалізації: користувачі одразу бачать вплив змін на координати чи вектори, що сприяє кращому засвоєнню. Три з цих чотирьох програм є безкоштовними. Нижче наведено порівняльну таблицю трьох безкоштовних програм.

Таблиця 2.1.

Векторні операції в GeoGebra, SageMath та Maxima

Векторна операція	GeoGebra	SageMath	Maxima
Створення вектора	Дуже просто: (1,2) або стрілкою на площині	Через vector([1,2])	Через [1,2] або makelist()
Додавання	так	так	так
Віднімання	так	так	так
Множення на число	так	так	так
Скалярний добуток	Dot[u,v]	u.dot_product(v)	dotproduct(u,v)
Векторний добуток (3D)	є, але обмежено	u.cross_product(v)	crossproduct(u,v)
Норма (довжина вектора)	Length[u] або Norm[u]	u.norm()	norm(u)
Нормалізація	вручну: u/Length[u]	u.normalized()	вручну: u/norm(u)
Кут між векторами	Angle[u,v]	u.angle(v)	через формулу
Проекція одного вектора на інший	є команда або формула	u.projection(v)	вручну
Ортогональна проекція	вручну	є	вручну
Довжина, напрям, компоненти	дуже наочно	є	є
Символьні вектори (x,y,z)	обмежено	чудово працює	чудово працює
Матриці + вектори	обмежено	чудово працює	добре працює
Розв'язання векторних рівнянь	немає	так	так
Робота в 3D	так, візуально	так, потужно	обмежено

Побудова векторів на площині	найкраще	треба писати код	старий інтерфейс
Анімація, динаміка	є	обмежено	немає
Підтримка базису, лін. комбінацій	обмежено	чудово	частково

GeoGebra є однією з найбільш доступних програм, що спрощує вивчення геометрії для багатьох вчителів. Її функціонал включає інструменти, необхідні для побудови двовимірних (планіметрія) та просторових (стереометрія) зображень, що робить її універсальною для застосування в даному випадку.

Простота інтерфейсу GeoGebra забезпечується його базовою структурою: графічне вікно для візуалізації та панель інструментів. Ключовою перевагою є кросплатформна доступність: програма може бути використана як безкоштовний мобільний додаток для пристроїв, що працюють на системах Android та iOS.

За допомогою GeoGebra можна створювати геометричні моделі об'єктів і інтерактивно змінювати їхні параметри. Спостереження за динамікою змін і їхніми результатами сприяє формуванню інсайтів та пошуку ефективного шляху розв'язування. Ця функціональність є винятково актуальною під час роботи з прикладними задачами.

Таким чином, сучасні онлайн-сервіси та мобільні додатки, завдяки своїй доступності та інтерактивності, є очевидно перспективними для впровадження в освітній процес.

Віртуальні лабораторії та симуляції створюють інтерактивне середовище, де учні можуть активно проводити власні експерименти з координатами та векторами. Яскравим прикладом є PhET Interactive Simulations, яка пропонує широкий вибір симуляцій, що сприяють глибшому дослідженню різних математичних концепцій. Додаток добре працює з векторами, пропонуючи симуляції для складання векторів, роботи з векторними рівняннями та візуалізації векторів, зокрема векторів швидкості та прискорення.

Анімовані відеоуроки з інтерактивними елементами є цінним інструментом для наочної демонстрації теми «Координати та вектори». Подібні ресурси широко представлені на YouTube, Khan Academy та інших платформах. Додатково, вчителі мають можливість самостійно створювати навчальні відео, забезпечуючи деталізований показ того, як зміни в параметрах координат або векторів впливають на кінцевий результат розв’язування задачі.

Для закріплення знань і навичок ефективно використовуються інтерактивні вправи. Розроблені на таких онлайн-платформах, як GeoGebra та Quizlet, ці вправи дають змогу учням виконувати операції з координатами і векторами та одразу отримувати зворотний зв'язок щодо правильності своїх дій.

2.3. Використання GeoGebra для формування практичної компетентності

Сучасна шкільна освіта перебуває у стані безперервного розвитку, що вимагає постійного пошуку нових та ефективних методів і засобів навчання. Ця динаміка зумовлена необхідністю підготовки учнів до життя у новітньому інформаційному суспільстві, що, своєю чергою, вимагає високого рівня грамотності, ефективності дій та швидкої адаптації до постійних змін. Таким чином, вдосконалення методик викладання шкільних дисциплін має вирішальний вплив на формування інтелектуально розвинутої та творчої особистості.

Вивчення геометрії, і зокрема теми «Координати та вектори», займає значне місце у формуванні грамотної сучасної особистості. Її роль полягає не лише у здобутті фундаментальних знань, але й у розвитку просторової уяви та вмінні ефективно застосовувати набуті знання в реальному житті.

Розвиток просторової уяви, необхідної для засвоєння практично всіх геометричних понять, зокрема координат і векторів, є, ймовірно, одним із найскладніших етапів навчання. Значна кількість школярів відчуває труднощі з вирішенням абстрактних задач саме через нездатність уявити й коректно відобразити необхідну геометричну конфігурацію.

Сучасне суспільство пропонує низку засобів для вирішення цієї проблеми, які дають змогу ефективно спрямовувати пізнавальну діяльність учнів й з легкістю формувати просторові уявлення. Зокрема, використання програмних засобів при вивченні координат та векторів відкриває значні можливості для якісної візуалізації як теоретичного матеріалу, так і практичних, особливо прикладних, задач.

Актуальність застосування програмних засобів у навчанні цих тем також зумовлена переходом до дистанційної форми освіти. Цей формат, який вже став звичним, вимагає особливого підходу до організації навчального процесу та ефективного використання візуалізаційних можливостей, які надають ці засоби.

Міністерство освіти і науки України (МОН) розробило організаційно-методичні рекомендації щодо навчання із застосуванням дистанційних технологій. Ці рекомендації містять чіткі вказівки стосовно вибору оптимальних інструментів та ресурсів для організації дистанційного освітнього процесу.

Використання інноваційних технологій у процесі роботи над задачами, зокрема, з теми «Координати та вектори» сприяє покращенню навчального процесу та якості знань. У цьому контексті GeoGebra є однією з найбільш затребуваних програм, оскільки вона надає можливість створювати інтерактивні моделі, ефективно розвивати просторові уявлення та спрямовувати пізнавальну діяльність учнів.

2.4. Важливість встановлення міжпредметних зв'язків

Сучасна шкільна освіта перебуває у стані постійного розвитку, регулярно формуючи нові завдання та визначаючи ключові напрями оновлення свого змісту. На поточному етапі до них належать:

- оновлення фундаментальної складової неперервної освіти, забезпечення її універсальності;
- посилення практичної спрямованості, формування загальнокультурних, загальнонавчальних умінь і навичок, що забезпечуватимуть функціональну грамотність учнів, сприятимуть їхньому розвитку, орієнтуватимуть на творчу діяльність, на поповнення своїх знань, набуття досвіду впродовж усього життя;
- розробка духовно-моральних основ і патріотичного виховання дітей та молоді в контексті загальнолюдських і національних цінностей [18].

З огляду на ці завдання, необхідною умовою вивчення будь-якого об'єкта є його пізнання в системі, а не ізольовано. Це означає, що сам процес навчання має розкривати цілісність об'єктів, сприяти виявленню їхніх зв'язків з іншими елементами та формувати в учнів уявлення про цілісну картину навколишнього світу.

Принцип системності є ключовим дидактичним принципом, якого стосується вищесказане. Його реалізація протягом шкільного навчання досягається шляхом встановлення міжпредметних зв'язків. Ці зв'язки, своєю чергою, забезпечують необхідну узгодженість між змістом навчальних програм та підручників з різних предметів.

Взаємозв'язок об'єктів пізнання між різними галузями сприяє підвищенню науковості навчання. Інтегруючи цей чинник у процес формування світогляду, педагоги активно мотивують розвиток творчих здібностей та посилюють пізнавальний інтерес школярів.

Впроваджуючи міжпредметні зв'язки на уроках математики (зокрема, при вивченні теми «Координати та вектори»), вчитель одночасно реалізує кілька ключових функцій: навчання – набуття учнями нових знань через системне бачення понять; розвиток і виховання – стимулювання пізнавальної діяльності та інтересу до математики й суміжних предметів; конструювання – створення нових, більш ефективних методів та форм організації навчання.

Реалізацію міжпредметних зв'язків варто здійснювати на етапі вивчення нових понять, демонструючи їхній зв'язок із суміжними елементами інших дисциплін. Найбільш ефективною формою є використання міжпредметних задач. При вивченні координат та векторів зміст цих задач слід базувати на поняттях природничих предметів, за умови, що об'єкт моделювання задачі є знайомим для учня.

Розглянемо декілька задач на тему «Координати та вектори» та покажемо, як ці задачи встановлюють міжпредметні зв'язки.

1. Задача на визначення відстані між точками.

Задача:

Місто А має координати (2, 3), а місто В – (10, 7). Знайдіть відстань між ними, якщо вважати, що вона вимірюється в кілометрах.

Розв'язання:

Формула відстані між точками:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Підставимо значення:

$$d = \sqrt{(10-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} \approx 8.94(км)$$

Відповідь: 8,94 км.

Ця задача встановлює міцні міжпредметні зв'язки з наступними дисциплінами:

- Географія та картографія: хоча у задачі використовуються декартові координати (x,y), вони є спрощеною моделлю для широти і довготи (географічних координат), які використовуються для точного визначення місця розташування на Землі. Принцип, закладений у розв'язання даної задачі, лежить в основі всіх планів міст і картографічних проекцій, де об'єкти (міста) зображені на площині, і відстань між ними можна виміряти.
- Фізика та механіка: відстань між точками – це шлях або величина переміщення, які є ключовими поняттями у фізиці. Знайдена відстань при відомому часі в подальшому дозволяє розрахувати швидкість.

- Інформатика та комп'ютерні науки: усі 2D та 3D ігри і графічні редактори використовують координати для розміщення об'єктів та формулу відстані (або її 3D-аналог) для перевірки зіткнень або, наприклад, розрахунку дальності стрільби. В основі GPS-навігаторів та картографічних програм (наприклад, Google Maps) лежить постійний розрахунок відстаней (з поправкою на те, що це сфера, а не площина) і напрямків між об'єктами.

Використана при розв'язанні задачі формула відстані є не лише геометричним правилом, а й універсальним інструментом для вимірювання, моделювання та оптимізації у багатьох сферах, які вимагають роботи з простором та положенням.

2. Задача на знаходження середини відрізка.

Два магазини розташовані в точках A(4; 8) та B(10; 2). Де слід розташувати склад, щоб він знаходився рівновіддалено від обох магазинів?

Розв'язання:

Формула середини відрізка:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right);$$

$$M\left(\frac{4+10}{2},\frac{8+2}{2}\right)=M(7,5).$$

Відповідь: оптимальне місце для складу – точка (7;5).

Ця задача встановлює міцні міжпредметні зв'язки з наступними дисциплінами:

- Логістика: дана задача вирішує проблему визначення оптимального розташування об'єкта (складу) відносно джерел чи споживачів (магазинів) для мінімізації транспортних витрат або часу доставки. Аналогічний принцип використовується для розташування пожежних депо, станцій швидкої допомоги чи поліцейських дільниць, щоб вони могли дістатися до двох важливих об'єктів за однаковий мінімальний час.
- Економіка (теорія розміщення): наявні в задачі геометричні принципи використовуються для моделювання економічних рішень щодо просторового розміщення виробництва, торгівлі та інфраструктури. Середина відрізка у спрощених економічних моделях може служити

розрахунком рівноваги попиту між двома конкурентами, точки, де клієнтам байдуже, до якого магазину йти.

- Геодезія: точка (7;5) – це лише одна точка на прямій, яка називається серединним перпендикуляром (медіатрисою) до відрізка AB. Усі точки на цій прямій рівновіддалені від точки A та B. Принцип медіатриси використовується при плануванні інфраструктурних об’єктів (наприклад, прокладання спільної комунікаційної лінії), яка має бути доступною для двох точок, розташованих на одній і тій же відстані від неї.

Ця задача ілюструє, як просте геометричне поняття «середина відрізка» перетворюється на «оптимальне розташування» у бізнесі, логістиці та просторовому аналізі.

3. Задача про рух дрона.

Дрон летить з точки A(2;3) на 4 км вправо і 3 км вгору. Потім він повертає на 2 км вліво і 5 км вниз. Знайдіть його кінцеві координати.

Розв’язання:

Вектор першого переміщення: $(4; 3)$.

Вектор другого переміщення: $(-2; -5)$.

Сума векторів:

$$(4-2, 3-5)=(2,-2).$$

Кінцеві координати:

$$(2+2, 3-2)=(4,1).$$

Відповідь: дрон опиниться в точці (4;1).

Ця задача встановлює міцні міжпредметні зв’язки з наступними дисциплінами:

- Інформатика та комп’ютерне моделювання: усі сучасні 3D-рушії використовують векторну алгебру для розрахунку переміщення, зіткнень, відбиття променів та анімації. Додавання векторів є базовим алгоритмом для знаходження нового положення об’єкта після кількох послідовних рухів. У програмуванні координати дрона зберігаються як змінні (x,y). Операція додавання векторів – це фактично операція додавання відповідних компонент

$$new\_x = old\_x + \partial x$$

$$new\_y = old\_y + \partial x$$

Це є основою будь-якого коду, що керує рухом об'єктів.

- Фізика та механіка: геометричне додавання векторів є математичною моделлю для фізичного поняття переміщення. Вектор переміщення у задачі сполучає початкове та кінцеве положення дрона, яке складається з додавання вектора першого польоту та вектора другого польоту.
- Географія та навігація: усі автопілоти та навігатори (включаючи дрони) працюють, використовуючи вектори. Навігатор постійно розраховує вектор бажаного напрямку (ціль) і вектор поточного руху. Додавання та віднімання векторів дозволяє скоригувати курс, наприклад, врахувати вектор вітру (компенсація знесення).

Задача про політ дрона демонструє, що векторне додавання – це універсальний математичний апарат, що забезпечує точне моделювання руху та планування у сферах, які вимагають роботи з напрямком і величиною. Це фундаментальний зв'язок між геометрією, фізикою та інженерними науками.

4. Задача на кут між дорогами (скалярний добуток векторів).

Дві дороги задані векторами a=(3;4) та b=(5;2). Знайдіть кут між ними.

Розв'язання:

Формула кута між векторами:

$$cos(\theta) = \frac{a \cdot b}{|a||b|}.$$

Обчислимо скалярний добуток:

$$a \cdot b = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 23.$$

Знайдемо довжини векторів:

$$|a| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5\ , \quad |b| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}.$$

Підставимо у формулу:

$$cos(\theta) = \frac{23}{5 \cdot \sqrt{29}} \approx 0.85,$$

$$arccos(0.85) = 31{,}79^0.$$

Відповідь: кут між дорогами дорівнює 31,79 градуса.

Ця задача встановлює міцні міжпредметні зв'язки з наступними дисциплінами:

- Географія та навігація: розрахунок кута між двома літаками або кораблями, які мають свої вектора курсу, дозволяє визначити небезпеку зближення, або безпечний кут розходження.
- Інформатика: кут, під яким промені світла потрапляють на поверхню (задану вектором нормалі), визначає яскравість і тінь. Чим менший кут між вектором нормалі (тобто чим ближче косинус кута до 1), тим світліше буде поверхня. У сучасному ІТ-аналізі, коли комп'ютер порівнює два документи, два пошукові запити або два профілі користувачів, він перетворює їх на вектори у багатовимірному просторі. Косинус кута між цими векторами (так звана косинусна подібність) показує, наскільки схожий їхній зміст.

Розрахунок кута між двома векторами за допомогою скалярного добутку є універсальним інструментом для кількісної оцінки взаємного орієнтування напрямлених величин. Це дозволяє моделювати ефективність процесів (фізика), безпеку руху (навігація) та ступінь схожості (інформатика).

5. Задача на проекцію сили на напрям руху.

Корабель рухається за вектором a=(8;6), а буксирна сила діє вздовж b=(10;0). Яка проекція вектора швидкості корабля на напрям буксирування?

Розв'язання:

Формула проекції вектора:

$$proj_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} \qquad proj_b a = \frac{8 \cdot 10 + 6 \cdot 0}{\sqrt{10^2 + 0^2}} = \frac{80}{10} = 8.$$

Відповідь: швидкість судна вздовж буксирного напряму 8 вузлів.

Ця задача встановлює міцні міжпредметні зв'язки з наступними дисциплінами:

- Фізика: на уроках фізики (механіка, 9-10 класи) часто потрібно знайти, яка частина сили (або швидкості) діє вздовж заданого напрямку. У наданій задачі буксирна сила діє лише горизонтально (вздовж осі x). Проекція швидкості показує, що лише 8 вузлів від загальної швидкості корабля спрямована вперед, у напрямку, в якому його тягне буксир. Формула проекції лежить в основі розкладання вектора на компоненти. У фізиці рух об’єкта під кутом (наприклад, кинутого тіла) розглядається як сума рухів уздовж осей x та y. Проекція дозволяє відокремити ці складові, що спрощує розрахунки.

- Інженерія та морська справа: коли буксир тягне корабель, він рідко тягне його ідеально рівно вперед. Проекція дозволяє інженерам визначити, яка частина тяги буксира або яка частина швидкості корабля є корисною у бажаному напрямку. Крім того, проекція швидкості корабля на вісь, перпендикулярну до його курсу, показує, як сильно його зносить вітер або течія (дрейф).
- Інформатика та комп’ютерна графіка: проекція використовується для відображення об’єктів на площині (2D-екран) та розрахунку взаємодії в ігрових рушіях. У 3D-графіці, щоб відобразити тривимірний об’єкт на двовимірному екрані, потрібно проектувати (кинути тінь) 3D-координати на 2D-площину екрана. Принцип, закладений у формулі проекції, використовується для цих перетворень.

Задача про проекцію швидкості корабля встановлює міцний зв’язок між геометрією та фізикою, показуючи, як математичний інструмент (проекція вектора) дозволяє точно визначити ефективну складову будь-якої спрямованої величини (сили, швидкості, тяги) у заданому напрямку.

2.5. Потреба в розробці спеціалізованого навчального додатку для опанування теми «Координати та вектори»

Сучасний освітній простір характеризується надлишком навчального контенту. Сьогодні доступна величезна кількість підручників, посібників, лекцій, а також аудіо- та відеоматеріалів, що охоплюють шкільний курс математики. Проблема полягає не у відсутності інформації, а у фрагментованості та несистемності її подачі. Учням та викладачам часто доводиться витрачати значний час на пошук, фільтрацію та інтеграцію розрізнених джерел, що стосуються однієї теми, як-от «Координати та вектори». Ця розпорошеність уповільнює процес навчання та ускладнює формування цілісного розуміння предмета.

Обмеження універсальних графічних калькуляторів.

Незважаючи на наявність потужних універсальних графічних калькуляторів та математичних програм, які здатні виконувати обчислення і візуалізацію, необхідні для вивчення векторів і координат, їхня ефективність для цільового навчання залишається обмеженою. Ці інструменти розроблені як загальні математичні засоби, і хоча вони можуть обробляти вектори, вони не містять спеціалізованого дидактичного контексту. Їм бракує інтегрованого теоретичного пояснення, прикладних задач із зазначенням міжпредметних зв'язків та змодельованого фізичного процесу, що демонструє роботу векторів. Універсальність таких калькуляторів не замінює потребу у тематичній спрямованості.

Обґрунтування потреби спеціалізованих тематичних додатків.

Це зумовлює нагальну потребу в створенні спеціалізованих тематичних додатків для кожної ключової теми шкільного курсу математики. Ідеальний додаток, присвячений, наприклад, «Координатам та векторам», має бути комплексним рішенням. Він повинен включати всю необхідну теорію, банк прикладних задач, чітко встановлені міжпредметні зв'язки для мотивації та, що найважливіше, інтерактивний симулятор. Такий симулятор повинен на прикладі конкретного фізичного процесу (наприклад, рух у двофазному середовищі) наочно демонструвати практичне застосування векторного апарату, створюючи міст між абстрактною теорією та реальністю.

Дидактична цінність комплексного рішення.

Головна дидактична цінність такого спеціалізованого додатку полягає в концентрації навчального матеріалу. Він дозволяє учневі та викладачу мати всю необхідну теорію, практику та демонстраційний інструментарій в одному місці та стисло – «під рукою». Це значно оптимізує час підготовки до уроків, самостійних та тематичних оцінювань. Учні отримують миттєвий доступ до теорії та практики, а інтерактивний симулятор забезпечує глибоке концептуальне розуміння, перетворюючи пасивне запам'ятовування формул на активне дослідження.

Переваги та недоліки тематичної інтеграції.

Основною перевагою інтеграції теорії, практики та симулятора в одному тематичному додатку є підвищення ефективності навчання та мотивації учнів за рахунок постійного зв'язку між теорією й практикою. Це потужний інструмент для персоналізації навчання. Однак, існують і потенційні недоліки: такий додаток потребує постійного оновлення та підтримки, а його вузька спеціалізація може вимагати від навчального закладу використання багатьох різних додатків (по одному на кожну тему), що може підвищити загальну вартість цифрового освітнього портфеля. Незважаючи на це, педагогічна ефективність зосередженого, якісного матеріалу переважає ці логістичні виклики.

РОЗДІЛ III. Інтерактивний додаток «Координати і вектори наочно», як ефективний засіб забезпечення практичної компетентності

3.1. Теоретико-практичний модуль додатка

У процесі виконання магістерської роботи був розроблений навчальний додаток «Координати і вектори наочно». Цей додаток є цілісним програмним комплексом, спрямованим на поглиблине опанування учнями шкільного курсу «Координати та вектори на площині». Деталізовано поняття векторів на площині, основні дії над векторами (додавання, віднімання, множення на скаляр) та методику розкладання вектора на складові, що є критично важливим для аналізу фізичних процесів. Також міститься матеріал про прямокутні координати і практичні аспекти дій над векторами, що задані координатами, забезпечуючи зв'язок між алгебраїчним та геометричним представленням понять [19] [20].

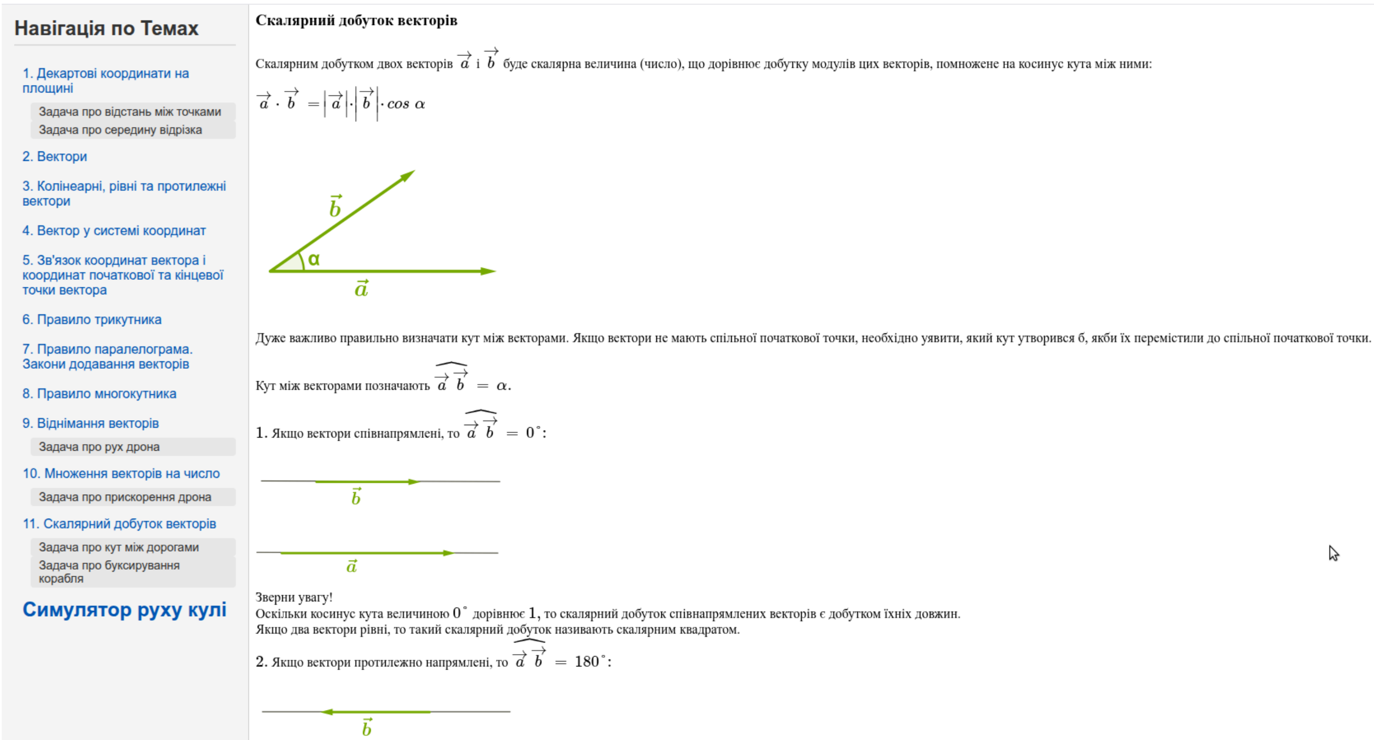

Рис.3.1.Сторінка додатку «Координати і вектори наочно». Теорія.

Практична орієнтація та міжпредметні зв'язки.

Ключовою методичною особливістю додатку є інтеграція теоретичного контенту з його прикладним значенням. До теорії додаються ретельно відібрані прикладні задачі, які демонструють використання векторного та координатного апарату в реальному світі. Це дозволяє учням усвідомити не абстрактний, а функціональний характер вивчених понять. Супровідний опис кожної задачі обов’язково включає вказівку на міжпредметні зв’язки (наприклад, з фізикою, інженерією, навігацією), що сприяє формуванню цілісної наукової картини світу та підвищує мотивацію до вивчення математики через її практичну значущість.

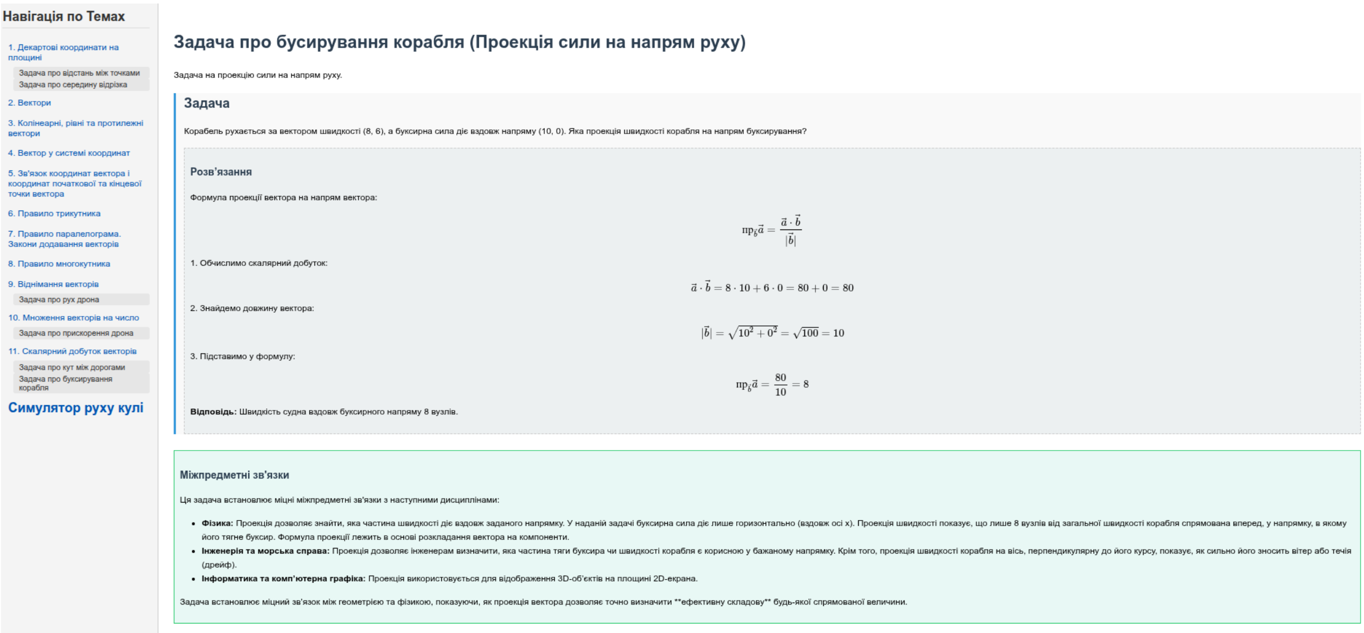

Рис.3.1.Сторінка додатку «Координати і вектори наочно». Прикладна задача

3.2. Інтерактивний симулятор руху (модуль візуалізації векторів)

Найбільш інноваційним компонентом додатку є інтерактивний фізичний симулятор, розроблений для візуалізації руху матеріальної точки (кулі). Симулятор моделює рух об’єкта у складному середовищі, розділеному на дві динамічні фази: повітря (газ) та рідина, з можливістю динамічного переходу між ними. Додаток використовує чисельний метод Ейлера для інтегрування рівнянь руху, що дозволяє точно відображати зміну швидкості, прискорення та положення кулі. Можливість уповільнення симуляції в 10 разів та функція паузи перетворюють динамічний процес на статичний аналітичний інструмент.

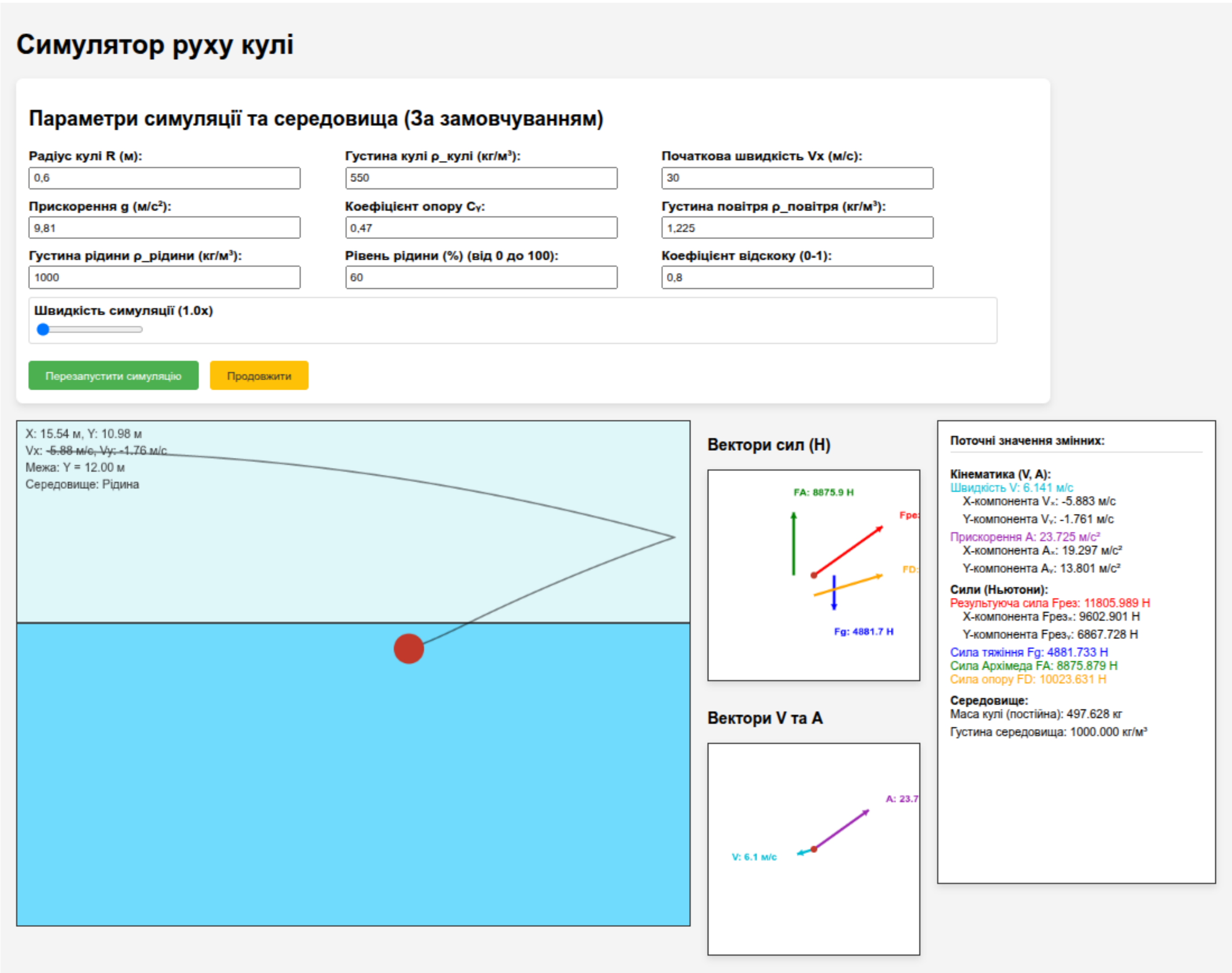

Рис.3.1.Сторінка симулятора руху кулі

Векторний аналіз і другий закон Ньютона

Ключова освітня цінність цієї функції полягає у можливості спостерігати та аналізувати, як зміна властивостей середовища (густина, опір) впливає на вектори сили та швидкості. Це є прямим застосуванням теми «Дії над векторами» та «Розкладання вектора на складові» для розв'язування диференціальних рівнянь руху. Симулятор чітко відображає траєкторію руху та забезпечує візуалізацію ключових векторів на окремих панелях: сил (F_g, F_A, F_D, $F_{рез}$) та прискорення $\vec{a}$, наочно демонструючи другий закон Ньютона $\vec{F} = \mathrm{m} \cdot \vec{a}$, візуально пов'язуючи абстрактну векторну суму з результатом прискорення.

Експериментальне навчання та дидактична цінність

Симулятор функціонує як потужний дидактичний інструмент, що переводить вивчення абстрактних векторних понять у площину експериментального пізнання. Він надає учням можливість самостійно змінювати початкові умови (вектор швидкості, початкові координати) та досліджувати динамічний перехід об'єкта між повітрям й рідиною, візуально фіксуючи зміну траєкторії та векторів. Координати кулі постійно оновлюються на екрані, закріплюючи просторове розуміння руху. Це сприяє не лише кращому засвоєнню теоретичного матеріалу щодо координат та векторів, але й розвитку навичок моделювання та векторного аналізу фізичних систем, що є необхідною базою для подальшого навчання.

Сильні сторони (переваги), обмеження та напрямки для вдосконалення додатку

Сильною стороною симулятора є його детальне векторне відображення з числовими значеннями та одиницями виміру, що допомогає учням перевіряти свої теоретичні розрахунки. Можливість налаштовувати фізичні константи дозволяє створювати унікальні навчальні експерименти. Великим плюсом також є функція відбиття від стінок, що дозволяє моделювати замкнені системи та вивчати закон збереження імпульсу/енергії. Функції уповільнення та паузи, в поєднанні з чітким візуальним розділення векторів сил та кінематики, значно підвищують інструктивну цінність.

Незважаючи на високу навчальну цінність, симулятор має певні слабкі сторони та обмеження. По-перше, він використовує спрощений метод Ейлера, який може призводити до неточностей у розрахунках при екстремальних умовах. По-друге, симулятор моделює кулі як матеріальну точку, ігноруючи обертальні рухи, а також їхній вплив на опір (наприклад, ефект Магнуса). По-третє, графічний інтерфейс є мінімалістичним і не має складних аналітичних інструментів, таких як графіки залежності швидкості, прискорення чи енергії від часу, які могли б значно підвищити його потужність для поглибленого аналізу.

Структура коду симулятора руху кулі

Код симулятора складається з трьох основних частин (HTML, CSS та JavaScript), причому основна логіка розподілена між блоками констант, ініціалізації, інтеграції (фізики) та візуалізації (малювання).

Таблиця 3.1.

Структура коду додатка

Блок	Файл/Розділ	Призначення
HTML (DOM)	<head> та <body>	Створює інтерфейс користувача: поля для введення параметрів (<input>), кнопки керування, основний Canvas (mainCanvas) та допоміжні Canvas для векторів (forceCanvas, kinematicCanvas), а також панель числових значень (valueDisplayPanel).
CSS	<style>	Визначає зовнішній вигляд, розміщення та стилі всіх елементів (розділення екрана на три колонки, розміри Canvas, колірна схема).
Константи	const DT_BASE, const SCALE, const MAX_*	Встановлює базовий крок часу, масштаб світу до пікселів, розміри Canvas та ліміти для динамічного масштабування векторів.
Ініціалізаці	function initialize()	Готує симулятор до запуску: зчитує

я		всі параметри з полів введення (<input>), розраховує постійні фізичні величини (V,m,Fg,A), встановлює початкове положення (x,y) та швидкість.
Фізика	function update()	Основний цикл розрахунку на кожному кроці dt. Визначає сили (Fg ,FA,FD), обчислює прискорення (ax ,ay) та застосовує метод Ейлера для оновлення швидкості та положення кулі. Зберігає поточні вектори в lastForces.
Рендеринг	function draw(), function loop()	Головний цикл малювання: викликає update(true) для оновлення даних, малює середовище, слід та кулю на mainCanvas, а також викликає функції для візуалізації векторів та числових значень.

Таблиця 3.2.

Список основних функцій та їхнє призначення

Функція	Призначення
initialize()	Зчитує налаштування з HTML-полів, розраховує постійну масу кулі (m) та об'єм (V). Скидає стан симуляції та встановлює початкові умови.
updateTimeScale(sliderValue)	Динамічно змінює змінну current_dt на основі положення повзунка швидкості. Керує швидкістю симуляції.
update(onlyCalcul	Основний фізичний рушій. Розраховує всі сили (Fg,FA

ateForces)	,FD), знаходить результуючу силу (Fрез) та прискорення (a). Якщо onlyCalculateForces = false, застосовує метод Ейлера для зміни x,y,vx,vy.
checkBoundaryCollision()	Перевіряє, чи торкнулая куля країв Canvas. При зіткненні інвертує відповідну компоненту швидкості та застосовує коефіцієнт відскоку (restitution).
loop()	Головний цикл анімації, який виконується браузером через requestAnimationFrame. Викликає update() (для руху) та draw() (для відображення) доки симуляція не зупинена або не поставлена на паузу.
togglePause()	Керує станом isPaused при натисканні кнопки. Зупиняє або відновлює цикл loop().
draw()	Керує графічним рендерингом: очищає Canvas, малює середовище, викликає функції відображення векторів та оновлює текстову панель.
drawForceVectors (ctx, size)	Візуалізує вектори сил (Fg,FA,FD,Fрез) на forceCanvas. Використовує динамічне масштабування та горизонтальне зміщення для розділення Fg та FA.
drawKinematicVectors(ctx, size)	Візуалізує вектори швидкості (V) та прискорення (A) на kinematicCanvas. Використовує динамічне масштабування та коректно інвертує Y-координати.
updateValueDisplay()	Обчислює та форматує всі ключові числові значення (компоненти сил, швидкості, прискорення, масу) та відображає їх на текстовій панелі valueDisplayPanel.

3.3. Експериментальна перевірка ефективності розробленого додатка

Організація експериментальної перевірки

Експериментальна перевірка ефективності розробленого програмного забезпечення була проведена під час проходження педагогічної практики на базі Дрогобицького фахового механіко-технічного коледжу. Цей етап був критично важливим для оцінки функціональності, зручності інтерфейсу та, головне, дидактичної цінності додатку в реальних навчальних умовах. Перевірка здійснювалася у кілька етапів: від презентації продукту до його безпосереднього виростання цільовою аудиторією – учнями та викладачами коледжу, які працюють з навчальною темою «Координати та вектори».

Інтеграція додатку в навчальний процес.

Протягом експериментального періоду учасники активно використовували всі ключові компоненти додатку. Учні мали можливість не лише ознайомитися з поглибленим матеріалом навчально-методичного модуля, який включав структуровану теорію, приклади розв'язування задач та встановлення міжпредметних зв'язків, але й взаємодіяти з інтерактивним стимуляційним модулем. Викладачі інтегрували додаток у свої заняття як додатковий ресурс для візуалізації складних концепцій, зокрема руху об'єкта у двофазному середовищі, що дозволило перевести абстрактні векторні обчислення у площину практичного моделювання.

Методологія збору даних.

Для отримання об'єктивної оцінки ефективності додатку було застосовано метод анкетування (опитування). Опитування було структуроване для збору кількісних та якісних даних від двох різних груп респондентів: учнів та викладачів. Питання стосувалися кількох ключових аспектів: зрозумілості теоретичного матеріалу, корисності прикладних задач та міжпредметних зв'язків, інтуїтивності інтерфейсу, а також, що особливо важливо, впливу стимуляційного модулю на розуміння векторного аналізу та фізичних процесів.

Опитування для вчителів та викладачів (15 питань)

Модуль I. Теоретичний контент та структура (Питання 1–5)

Мета: Оцінити методичну цінність та організацію навчального матеріалу.

1. Наскільки чіткою та логічною є структуризація теоретичного матеріалу?
2. Наскільки ефективно реалізовано зв'язок між алгебраїчним та геометричним представленням понять (через координати та вектори)?
3. Оцініть, наскільки повно та зрозуміло викладено матеріал про основні дії над векторами (додавання, віднімання, множення на скаляр).
4. Наскільки додаток полегшує підготовку до бінарних уроків завдяки наявності чітко сформульованих міжпредметних зв'язків?
5. Оцініть потенціал додатку для самостійної роботи учнів порівняно з традиційними навчальними матеріалами.

Модуль II. Прикладна орієнтація та міжпредметні зв'язки (Питання 6–9)

Мета: Оцінити якість прикладних задач та їхню роль у формуванні практичної компетентності.

6. Наскільки ретельно підібрані прикладні задачі демонструють використання векторного та координатного апарату в реальному світі?
7. Оцініть, наскільки успішно прикладні задачі сприяють усвідомленню функціонального характеру вивчених понять, а не лише їхньої абстрактної суті.
8. Оцініть корисність міжпредметних зв’язків (з фізикою, інженерією, навігацією), які супроводжують опис задач, для формування цілісної наукової картини світу.
9. Наскільки прикладні задачі сприяють формуванню практичної компетентності учнів?

Модуль III. Інтерактивний симулятор (Модуль візуалізації) (Питання 10–15)

Мета: Оцінити дидактичну цінність симулятора як інструменту візуалізації складних концепцій.

10. Оцініть ефективність симулятора для візуалізації руху об'єкта у двофазному середовищі (повітря/рідина).
11. Наскільки наочно симулятор демонструє другий закон Ньютона $\vec{F}=\mathrm{m}\cdot\vec{a}$ через візуалізацію векторів сил і прискорення?
12. Наскільки корисною є можливість наочно спостерігати та аналізувати зміну властивостей середовища (густина, опір) та її вплив на вектори сили та швидкості?
13. Оцініть дидактичну цінність функцій уповільнення та паузи для аналізу динамічного процесу.
14. Наскільки важливими є функції відображення числових значень векторів та можливість змінювати фізичні константи) для організації навчальних експериментів?
15. Оцініть загальну інтуїтивність та зручність графічного інтерфейсу додатка.

Опитування для учнів (15 питань)

Модуль І. Зрозумілість та структура (Питання 1–5)

Мета: Оцінити легкість засвоєння теорії та навігацію.

1. Наскільки легко було знаходити потрібну інформацію та орієнтуватися у структурі теоретичного матеріалу?
2. Наскільки зрозуміло викладено матеріал про дії над векторами (додавання, віднімання, множення на число)?
3. Оцініть, наскільки додаток підвищив Вашу мотивацію до вивчення математики.
4. Чи допомогли Вам приклади, які пов'язують координати з векторами, краще зрозуміти ці поняття?
5. Наскільки цікавою та корисною була інформація про міжпредметні зв’язки (з фізикою, інженерією, навігацією)?

Модуль ІІ. Прикладні задачі (Питання 6–9)

Мета: Оцінити практичну цінність та реалістичність прикладів.

6. Наскільки цікавими та реальними виглядали прикладні задачі, які демонструють застосування векторів?
7. Чи допомогли Вам прикладні задачі усвідомити, як математика використовується в реальному житті (наприклад, у логістиці, навігації, фізиці)?
8. Наскільки прикладні задачі полегшили розуміння функціонального призначення математичних правил?
9. Оцініть загальну корисність розділу з прикладними задачами для Вашого навчання.

Модуль ІІІ. Інтерактивний симулятор (Модуль візуалізації) (Питання 10–15)

Мета: Оцінити ефективність симулятора для візуального засвоєння складних концепцій.

10. Наскільки ефективним був Симулятор для візуалізації векторів сили та швидкості при зміні середовища (повітря/рідина)?
11. Чи допоміг Вам Симулятор краще зрозуміти тему «Розкладання вектора на складові»?
12. Наскільки корисними були функції уповільнення (у 10 разів) та паузи для детального аналізу руху кулі?
13. Наскільки наочно Симулятор демонструє, як векторна сума сил $F_{рез}$ впливає на вектор прискорення $\vec{a}$?
14. Оцініть можливість самостійно змінювати початкові умови (швидкість, координати) для проведення власних «експериментів».
15. Оцініть, наскільки зручно було користуватися Інтерактивним Симулятором (інтерфейс, налаштування).

Оцінка та рекомендації викладацького складу

Викладачі коледжу, як фахівці у предметній галузі, надали цінну експертну оцінку. Вони високо оцінили методичну структурованість додатку, особливо чіткий поділ матеріалу на параграфи та пункти, а також наявність чітко сформульованих міжпредметних зв’язків, що полегшує підготовку до бінарних уроків. Викладачі зазначили, що додаток може ефективно використовуватися як для самостійної роботи учнів, так і як демонстраційний інструмент під час лекцій. Отримані від викладачів конструктивні пропозиції дозволили ідентифікувати потенційні напрямки для подальшого вдосконалення інтерфейсу та розширення функціоналу симулятора.

Аналіз зворотного зв’язку від учнів

Результати опитування учнів продемонстрували високий рівень зацікавленості та позитивне сприйняття додатку. Більшість учнів відзначила, що інтерактивний симулятор став найбільш ефективним інструментом для візуалізації векторів сили та швидкості при зміні середовища, що суттєво полегшило розуміння теми «Розкладання вектора на складові». Вони також підкреслили цінність прикладних задач, які надали навчальному матеріалу практичного сенсу. Загалом, зворотний зв'язок підтвердив гіпотезу про те, що використання інтерактивних технологій значно підвищує мотивацію та якість засвоєння складних математичних концепцій.

ВИСНОВКИ

Якість освіти безпосередньо залежить від рівня математичної компетентності, на формування якої вирішально впливає прикладна спрямованість шкільного курсу. Тому метою даної роботи було дослідження методичних і практичних аспектів реалізації прикладного спрямування, особливо при вивченні розділу «Координати та вектори».

Прикладні задачі є важливою складовою навчання та засобом, який демонструє зв’язок теорії та практики. Проте, для того, щоб їхнє розв’язування ефективно підвищувало математичну й практичну компетентність учнів, необхідно, щоб ці завдання відповідали встановленим дидактичним і методичним критеріям.

Навчальний підручник відіграє вирішальну роль у досягненні поставлених цілей протягом вивчення теми «Координати та вектори». Оскільки серед основних цілей сьогодні виділяють загальнокультурні, наукові та прикладні, їхня реалізація вимагає підбору підручника з оптимальною структурою. З цією метою у роботі було проаналізовано вміст найбільш використовуваних посібників за даною темою на предмет наявності прикладних задач. Результати аналізу систематизовано у таблицях, що містять номери задач до кожної теми. На мою думку, за кількістю та різновидом типів прикладних задач найдосконалішими є підручники авторства Бурди М.І, Тарасенкової Н.А. та Бевза Г.П., Бевз В.Г.

Реалізація прикладної спрямованості при вивченні теми «Координати та вектори» не може бути ефективною лише за рахунок прикладних задач. Відтак, для формування практичної компетентності, педагогам слід активно впроваджувати інноваційні та дієві методики. Зокрема, у роботі обґрунтовано, що встановлення міжпредметних зв’язків є одним із найбільш ефективних методів навчання.

Практичним результатом та засобом реалізації інноваційної методики став розроблений інтерактивний додаток «Координати і вектори наочно». Актуальність створення такого інструменту обумовлена необхідністю відійти від виключно абстрактного викладання математики та підвищити практичну компетентність учнів шляхом інтеграції векторного апарату з реальним світом через візуалізацію та моделювання.

Додаток являє собою цілісний програмний комплекс, що складається з теоретико-практичного модуля та інтерактивного симулятора руху. Теоретичний модуль забезпечує поглиблене опанування матеріалу через структуровану теорію, прикладні задачі та чітко сформульовані міжпредметні зв'язки. Ключовою дидактичною цінністю є інтерактивний симулятор, який візуалізує динамічний рух об'єкта у двофазному середовищі. Симулятор наочно демонструє дію другого закону Ньютона та процес розкладання вектора на складові, переводячи вивчення абстрактних векторних понять у площину експериментального пізнання.

Для підтвердження ефективності розробленого програмного забезпечення було проведено експериментальну перевірку на базі Дрогобицького фахового механіко-технічного коледжу. Методологія перевірки передбачала інтеграцію додатку в навчальний процес та збір об'єктивних кількісних і якісних даних через анкетування двох цільових груп: учнів та викладачів. Це дозволило оцінити функціональність, інтуїтивність інтерфейсу та, що найважливіше, дидактичний вплив інтерактивного стимуляційного модуля на розуміння векторного аналізу.

Результати експерименту продемонстрували високий рівень зацікавленості та позитивне сприйняття додатку. Більшість учнів та викладачів високо оцінили методичну структурованість матеріалу, а також підкреслили, що інтерактивний симулятор став найбільш ефективним інструментом для візуалізації векторів сили та швидкості, що суттєво полегшило засвоєння теми «розкладання вектора на складові». Зворотний зв'язок підтвердив гіпотезу дослідження: використання інтерактивних технологій значно підвищує мотивацію та якість засвоєння складних математичних концепцій.

У результаті проведеної роботи поставлені завдання було повністю вирішено, а визначена мета реалізована. Робота містить практично орієнтовані методичні рекомендації щодо підвищення математичної компетентності через прикладне спрямування при вивченні теми «Координати та вектори». Запропоновані приклади, задачі та розроблені додатки готові до впровадження в освітній процес.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Фазил Амзаєв, Леся Комарницька. Методичні особливості вивчення координат і векторів у шкільному курсі математики. Актуальні проблеми сучасної науки: Матеріали XII Міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій / За ред. Юрія Матуріна, Ігоря Столярчука. – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка, 2025. – С. 196-198.
2. http://www.osvita-ukrainy.com.ua/
3. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики / З. І. Слєпкань. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 240 с.
4. Семенець С. Особистісно-розвивальний підхід до математичної освіти. Пізнавально-задачний метод навчання // Математика в школі. – 2008, No 11-12. – С. 26-30.
5. Кушнір І. А. Координатно-векторний метод розв’язування задач / І. А. Кушнір. – Київ: Астарта, 1996. – 413 с.
6. Дендеренко О. О., Шарко В. Д. Проблемне навчання як освітня технологія // Відкритий урок. – 2002. - No 2. – С. 13-14.
7. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навчальний посібник / Г. П. Бевз. – 3-те вид., пероб. і допов. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.
8. Гриньов Б. В., Кириченко І. К. Векторна алгебра: Підруч. для вищих техн. навч. закладів. / За ред. О. М. Литвина. – Харків: Гімназія, 2008. – 164 с.
9. Рой Н. Ефективне використання проблемного навчання під час викладання математики // Освіта. Технікуми. Коледжі. – 2007. – 248 с.
10. Дичаківська І. М. Інноваційні педагогічні технології: Навчальний посібник / І. М. Дичаківська. – К.: Академвидав, 2004. – 352 с.
11. Семененко Т. Проблемний підхід до навчання математики // Відкритий урок. – 2002. - No 3-4. – С. 24-31.

12. Бродський Я., Павлов О. Шляхи оновлення змісту шкільної математичної освіти // Математика в школі. – 2008, No 1, С. 24 – 29.
13. Рамський Ю. С., Рамська К. І. Про роль математики і деякі тенденції розвитку математичної освіти в інформаційному суспільстві. Серія No2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання : Зб. наукових праць. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. No6(13). 2008. – С. 12–16.
14. Ракута В. М. Програми для роботи з функціями та графіками. Комп’ютер у школі та сім’ї. No 7 (87). 2010. – С. 29–33.
15. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків : Гімназія, 2015.
16. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал комп’ютерно-орієнтованих систем навчання математики. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання. Зб. наук праць / Редкол. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова. Випуск 7. 2003. – С. 3-16.
17. Триус Ю. В. Комп’ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики: [монографія]. Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 400 с.
18. Зміст сучасної шкільної освіти. Освіта.UA. URL: https://osvita.ua/school/method/787/
19. https://www.miyklas.com.ua/p/geometria/9-klas
20. https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/icgn/9krayevskij_matem_dovuzpidgot_studinozem/tema13.html
21. https://mon.gov.ua/news/perelik-navchalnoi-literaturi-dlya-vikoristannya-u-navchalno-vikhovnomu-protsesi
22. Істер О. С. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2017. 240 с.
23. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків : Гімназія, 2017. 240 с.
24. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Оріон, 2017. 224 с.

25. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Освіта, 2017. 272 с.
26. Істер О. С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2018. 384 с.
27. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк та ін. Харків: Гімназія, 2018. 256 с.
28. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти / М. І. Бурда та ін. Київ : Оріон, 2018. 288 с.
29. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика: Алгебра і початки аналізу та Геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Освіта, 2018. 288 с.
30. Бевз Г. П. Геометрія 11 клас: підручник / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров – К.: Генеза, 2011. – 335 с.
31. Погорєлов О. В. Геометрія 10-11 / О. В. Погорєлов. – К.: Освіта, 2000. – 138 с.
32. Апостолова Г. В. Геометрія 11 клас: Дворівневий підручник / Г. В. Апостолова. – К.: Генеза, 2011. – 304 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Код головної сторінки теоретико-практичного модуля

```
<!DOCTYPE html>
<html lang="uk">
<head>
  <meta charset="UTF-8">
  <meta name="viewport" content="width=device-width, initial-scale=1.0">
  <title>Вектори та Координати</title>
  <style>
    body, html {
      margin: 0;
      padding: 0;
      height: 100%;
      overflow: hidden; /* Запобігає прокручуванню всього вікна */
      font-family: Arial, sans-serif;
    }

    /* Контейнер для двох колонок */
    .container {
      display: flex;
      height: 100%;
    }

    /* Ліва колонка - Меню */
    .menu-sidebar {
      width: 300px; /* Фіксована ширина для меню */
      background-color: #f4f4f4;
      padding: 15px;
      box-sizing: border-box;
      overflow-y: auto; /* Прокручування лише для меню */
      border-right: 1px solid #ccc;
    }

    .menu-sidebar h2 {
      color: #333;
      border-bottom: 2px solid #ddd;
      padding-bottom: 5px;
      margin-top: 0;
    }

    .menu-sidebar ul {
      list-style: none;
      padding: 0;
    }

    .menu-sidebar li {
      margin-bottom: 8px;
    }

    .menu-sidebar a {
```

```
    text-decoration: none;
    color: #0056b3;
    display: block;
    padding: 5px 10px;
    border-radius: 4px;
    transition: background-color 0.2s;
}

.menu-sidebar a:hover {
    background-color: #e0e0e0;
    color: #003366;
}

/* Стилі для вкладеного меню (підпунктів) */
.menu-sidebar ul ul {
    list-style: none;
    padding-left: 20px; /* Відступ для підпункту */
    margin-top: 3px;
    margin-bottom: 3px;
}

.menu-sidebar ul ul li {
    margin-bottom: 0px;
}

.menu-sidebar ul ul a {
    font-size: 0.9em; /* Трохи менший шрифт */
    color: #333;
    background-color: #e6e6e6; /* Фон для підпункту */
    padding: 3px 10px;
}

.menu-sidebar ul ul a:hover {
    background-color: #cccccc;
    color: #000;
}
/* Кінець стилів для вкладеного меню */

/* Стиль для великого пункту Симулятора */
.simulation-item a {
    font-size: 1.5em; /* Збільшення шрифту в 1.5 рази */
    font-weight: bold;
}


/* Права колонка - Область контенту */
.content-area {
    flex-grow: 1; /* Займає весь простір, що залишився */
}

/* Iframe для відображення файлів */
.content-iframe {
```

```
            width: 100%;
            height: 100%;
            border: none; /* Видаляємо рамку навколо iframe */
        }
    </style>
</head>
<body>

    <div class="container">
        <div class="menu-sidebar">
            <h2>Навігація по Темах</h2>
            <ul>
                <li>
                    <a href="11_index_dekart_koord_na_plosh.html" target="contentFrame">1.
Декартові координати на площині</a>
                    <ul>
                        <li><a href="11_index_prikl_zad1_dekart_koord_na_plosh.html"
target="contentFrame">Задача про відстань між точками</a></li>
                        <li><a href="11_index_prikl_zad2_dekart_koord_na_plosh.html"
target="contentFrame">Задача про середину відрізка</a></li>
                    </ul>
                </li>
                <li>
                    <a href="21_index_ponatya_vek.html" target="contentFrame">2. Вектори</a>
                </li>
                <li>
                    <a href="22_index_kolinear_rivni_protelej_vek.html" target="contentFrame">3.
Колінеарні, рівні та протилежні вектори</a>
                </li>
                <li>
                    <a href="23_index_vek_u_sist_koordinat.html" target="contentFrame">4. Вектор у
системі координат</a>
                </li>
                <li>
                    <a href="24_index_zvyaz_koord_vek_i_koord_po4at.html" target="contentFrame">5.
Зв'язок координат вектора і координат початкової та кінцевої точки вектора</a>
                </li>
                <li>
                    <a href="25_index_pravilo_trikutn.html" target="contentFrame">6. Правило
трикутника</a>
                </li>
                <li>
                    <a href="26_index_pravilo_paralelograma.html" target="contentFrame">7. Правило
паралелограма. Закони додавання векторів</a>
                </li>
                <li>
                    <a href="27_index_pravilo_mnogokutnika.html" target="contentFrame">8. Правило
многокутника</a>
                </li>
                <li>
                    <a href="28_index_vidnimanya_vek.html" target="contentFrame">9. Віднімання
векторів</a>
```

```
          <ul>
            <li><a href="28_index_prikl_zad_vidnimanya_vek.html" target="contentFrame">Задача про рух дрона</a></li>
          </ul>
        </li>
        <li>
          <a href="29_index_mn_vek_na_4islo.html" target="contentFrame">10. Множення векторів на число</a>
          <ul>
            <li><a href="29_index_prikl_zad_mn_vek_na_4islo.html" target="contentFrame">Задача про прискорення дрона</a></li>
          </ul>
        </li>
        <li>
          <a href="30_index_skalarn_dobutok_vek.html" target="contentFrame">11. Скалярний добуток векторів</a>
          <ul>
            <li><a href="30_index_prikl_zad1_skalarn_dobutok_vek.html" target="contentFrame">Задача про кут між дорогами</a></li>
            <li><a href="30_index_prikl_zad2_skalarn_dobutok_vek.html" target="contentFrame">Задача про буксирування корабля</a></li>
          </ul>
        </li>
        <li class="simulation-item"><a href="simulation ver 10.html" target="contentFrame">Симулятор руху кулі</a></li>
      </ul>
    </div>

    <div class="content-area">
      <iframe name="contentFrame" class="content-iframe" src="11_index_dekart_koord_na_plosh.html">
        Ваш браузер не поддерживает iframes.
      </iframe>
    </div>
  </div>

</body>
</html>
```

ДОДАТОК Б
Код симулятора руху кулі.

```
<!DOCTYPE html>
<html lang="uk">
<head>
  <meta charset="UTF-8">
  <title>Симулятор руху кулі з роздільною візуалізацією векторів</title>
  <style>
    /* ... Стили без изменений ... */
    body {
      font-family: Arial, sans-serif;
      margin: 20px;
      background-color: #f4f4f4;
      display: flex;
      flex-direction: column;
      align-items: flex-start;
    }
    #simulationContainer {
      display: flex;
      gap: 20px;
      align-items: flex-start;
    }
    #vectorPanel {
      display: flex;
      flex-direction: column;
      gap: 15px;
    }
    #valueDisplayPanel {
      width: 300px; /* Фіксована ширина для числової панелі */
      background-color: #ffffff;
      padding: 15px;
      border: 2px solid #333;
      box-shadow: 0 4px 8px rgba(0,0,0,0.1);
      font-size: 14px;
      height: 520px; /* Щоб візуально відповідало висоті двох Canvas */
      overflow: auto;
    }
    canvas {
      border: 2px solid #333;
      display: block;
    }
    #mainCanvas {
      background-color: #e0f7fa;
    }
    #forceCanvas, #kinematicCanvas {
      background-color: #ffffff;
      box-shadow: 0 4px 8px rgba(0,0,0,0.1);
    }
    #controls {
      background-color: #fff;
```

```
    padding: 15px;
    border-radius: 8px;
    box-shadow: 0 4px 8px rgba(0,0,0,0.1);
    margin-bottom: 20px;
    width: 100%;
    max-width: 1200px;
}
.input-group {
    margin-bottom: 10px;
    display: inline-block;
    width: 30%;
    margin-right: 1%;
    vertical-align: top;
}
.input-group label {
    display: block;
    margin-bottom: 3px;
    font-weight: bold;
}
.input-group input[type="number"] {
    width: 90%;
    padding: 5px;
    box-sizing: border-box;
}
/* Спеціальний стиль для повзунка */
.slider-group {
    width: 95%;
    padding: 5px;
    border: 1px solid #ddd;
    border-radius: 4px;
}
.button-group button {
    padding: 10px 20px;
    color: white;
    border: none;
    border-radius: 4px;
    cursor: pointer;
    margin-top: 10px;
    margin-right: 10px;
}
#restartButton {
     background-color: #4CAF50;
}
#pauseButton {
     background-color: #FFC107;
     color: #333;
}
#valueDisplayPanel h4 {
    margin-top: 0;
    border-bottom: 1px solid #ddd;
    padding-bottom: 5px;
}
```

```
        .value-section {
            margin-bottom: 10px;
        }
    </style>
</head>
<body>

    <h1>Симулятор руху кулі</h1>

    <div id="controls">
        <h2>Параметри симуляції та середовища (За замовчуванням)</h2>

        <div class="input-group">
            <label for="radius">Радіус кулі R (м):</label>
            <input type="number" id="radius" value="0.6" step="0.1">
        </div>
        <div class="input-group">
            <label for="rho_sphere">Густина кулі ρ_кулі (кг/м³):</label>
            <input type="number" id="rho_sphere" value="550" step="10">
        </div>
        <div class="input-group">
            <label for="vx0">Початкова швидкість Vx (м/с):</label>
            <input type="number" id="vx0" value="30" step="1">
        </div>

        <div class="input-group">
            <label for="g_value">Прискорення g (м/с²):</label>
            <input type="number" id="g_value" value="9.81" step="0.01">
        </div>
        <div class="input-group">
            <label for="Cd">Коефіцієнт опору Cγ:</label>
            <input type="number" id="Cd" value="0.47" step="0.01">
        </div>
        <div class="input-group">
            <label for="rho_air">Густина повітря ρ_повітря (кг/м³):</label>
            <input type="number" id="rho_air" value="1.225" step="0.001">
        </div>

        <div class="input-group">
            <label for="rho_liquid">Густина рідини ρ_рідини (кг/м³):</label>
            <input type="number" id="rho_liquid" value="1000" step="10">
        </div>
        <div class="input-group">
            <label for="liquid_percent">Рівень рідини (%) (від 0 до 100):</label>
            <input type="number" id="liquid_percent" value="60" min="0" max="100" step="1">
        </div>
        <div class="input-group">
            <label for="restitution">Коефіцієнт відскоку (0-1):</label>
            <input type="number" id="restitution" value="0.8" min="0" max="1" step="0.1">
        </div>

        <div class="input-group slider-group">
```

```
            <label for="speedSlider">Швидкість симуляції (<span
id="currentSpeedDisplay">1x</span>)</label>
            <input type="range" id="speedSlider" min="1" max="10" value="1" step="0.5"
oninput="updateTimeScale(this.value)">
        </div>


        <div class="button-group">
            <button id="restartButton" onclick="startSimulation()">Перезапустити
симуляцію</button>
            <button id="pauseButton" onclick="togglePause()">Пауза</button>
        </div>
    </div>

    <div id="simulationContainer">
        <canvas id="mainCanvas" width="800" height="600"></canvas>

        <div id="vectorPanel">
            <div>
                <h3>Вектори сил (Н)</h3>
                <canvas id="forceCanvas" width="250" height="250"></canvas>
            </div>
            <div>
                <h3>Вектори V та A</h3>
                <canvas id="kinematicCanvas" width="250" height="250"></canvas>
            </div>
        </div>

        <div id="valueDisplayPanel">
            </div>

    </div>

    <script>
        // --- 1. ФІЗИЧНІ ТА ГРАФІЧНІ КОНСТАНТИ ---
        const DT_BASE = 0.0005;
        const MAIN_CANVAS_WIDTH = 800;
        const MAIN_CANVAS_HEIGHT = 600;
        const VECTOR_CANVAS_SIZE = 250;
        const SCALE = 30;
        const MAX_FORCE_VECTOR_PX = 100;
        const MAX_KINEMATIC_VECTOR_PX = 80;
        const MAX_PATH_LENGTH = 50000;
        const DOT_RADIUS_PX = 4;

        const VECTOR_OFFSET_PX = 24;

        const mainCanvas = document.getElementById('mainCanvas');
        const ctx = mainCanvas.getContext('2d');
        const forceCanvas = document.getElementById('forceCanvas');
        const forceCtx = forceCanvas.getContext('2d');
        const kinematicCanvas = document.getElementById('kinematicCanvas');
```

```
const kinematicCtx = kinematicCanvas.getContext('2d');
const pauseButton = document.getElementById('pauseButton');
const valueDisplayPanel = document.getElementById('valueDisplayPanel');

const WORLD_X_MIN = 0;
const WORLD_X_MAX = MAIN_CANVAS_WIDTH / SCALE;
const WORLD_Y_MIN = 0;
const WORLD_Y_MAX = MAIN_CANVAS_HEIGHT / SCALE;

function worldToCanvas(x_world, y_world) {
   const x_canvas = x_world * SCALE;
   const y_canvas = MAIN_CANVAS_HEIGHT - (y_world * SCALE);
   return { x: x_canvas, y: y_canvas };
}

// --- 2. ЗМІННІ СИМУЛЯЦІЇ ---
let R, rho_sphere, rho_liquid, rho_air, C_D, g, vx0, liquid_percent, restitution,
   V, m, A, Fg,
   x, y, vx, vy,
   Y_BOUNDARY_WORLD,
   isPaused = false,
   animationFrameId = null,
   pathHistory = [];

let lastForces = { Fg: 0, FA: 0, FD_x: 0, FD_y: 0, F_res_x: 0, F_res_y: 0, rho_medium: 0, ax:
0, ay: 0 };

let current_dt = DT_BASE;

// --- 3. ФУНКЦІЯ КЕРУВАННЯ ШВИДКІСТЮ ---
function updateTimeScale(sliderValue) {
   const scaleFactor = parseFloat(sliderValue);
   current_dt = DT_BASE * scaleFactor;
   document.getElementById('currentSpeedDisplay').textContent = scaleFactor.toFixed(1) +
'x';
}

// --- 4. ІНІЦІАЛІЗАЦІЯ ---
function initialize() {
   if (animationFrameId !== null) {
      cancelAnimationFrame(animationFrameId);
   }
   R = parseFloat(document.getElementById('radius').value);
   rho_sphere = parseFloat(document.getElementById('rho_sphere').value);
   rho_liquid = parseFloat(document.getElementById('rho_liquid').value);
   g = parseFloat(document.getElementById('g_value').value);
   C_D = parseFloat(document.getElementById('Cd').value);
   rho_air = parseFloat(document.getElementById('rho_air').value);
   vx0 = parseFloat(document.getElementById('vx0').value);
   restitution = parseFloat(document.getElementById('restitution').value);
   liquid_percent = parseFloat(document.getElementById('liquid_percent').value);
```

```
        Y_BOUNDARY_WORLD = WORLD_Y_MIN + (WORLD_Y_MAX * (liquid_percent /
100));

        x = R * 2;
        y = WORLD_Y_MAX - R * 2;
        vx = vx0;
        vy = 0.0;

        V = (4/3) * Math.PI * Math.pow(R, 3);
        m = rho_sphere * V;
        Fg = m * g;
        A = Math.PI * Math.pow(R, 2);

        pathHistory = [];
        isPaused = false;
        pauseButton.textContent = 'Пауза';
        valueDisplayPanel.innerHTML = '<h4>Поточні значення змінних:</h4>Очікування
запуску...';

        const initialSliderValue = document.getElementById('speedSlider').value;
        updateTimeScale(initialSliderValue);

        update(true);
    }

    // --- 5. ЛОГІКА ЗУПИНКИ/ВІДНОВЛЕННЯ ---
    function togglePause() {
        isPaused = !isPaused;
        if (isPaused) {
            pauseButton.textContent = 'Продовжити';
            draw(); // Обов'язкове перемальовування для оновлення числової панелі на паузі
        } else {
            pauseButton.textContent = 'Пауза';
            animationFrameId = requestAnimationFrame(loop);
        }
    }

    // --- 6. ОСНОВНА ЛОГІКА ОНОВЛЕННЯ ---
    function update(onlyCalculateForces = false) {
        const rho_medium = y > Y_BOUNDARY_WORLD ? rho_air : rho_liquid;
        const FA = rho_medium * V * g;
        const v = Math.sqrt(vx * vx + vy * vy);

        let FD_x = 0;
        let FD_y = 0;

        if (v > 1e-6) {
            const FD = 0.5 * C_D * rho_medium * A * v * v;
            FD_x = -FD * (vx / v);
            FD_y = -FD * (vy / v);
        }
```

```
        const F_res_x = FD_x;
        const F_res_y = FA - Fg + FD_y;

        const ax = F_res_x / m;
        const ay = F_res_y / m;

        lastForces = { Fg: Fg, FA: FA, FD_x: FD_x, FD_y: FD_y, F_res_x: F_res_x, F_res_y: 
F_res_y, rho_medium: rho_medium, ax: ax, ay: ay };

        if (onlyCalculateForces) return;

        // ВИКОРИСТАННЯ current_dt
        vx += ax * current_dt;
        vy += ay * current_dt;
        x += vx * current_dt;
        y += vy * current_dt;

        checkBoundaryCollision();

        pathHistory.push({x: x, y: y});
        if (pathHistory.length > MAX_PATH_LENGTH) {
            pathHistory.shift();
        }
    }

    // --- 7. ЛОГІКА ЗІТКНЕННЯ З КРАЯМИ ---
    function checkBoundaryCollision() {
        if (y - R < WORLD_Y_MIN) { y = WORLD_Y_MIN + R; vy = -vy * restitution; }
        if (y + R > WORLD_Y_MAX) { y = WORLD_Y_MAX - R; vy = -vy * restitution; }
        if (x - R < WORLD_X_MIN) { x = WORLD_X_MIN + R; vx = -vx * restitution; }
        if (x + R > WORLD_X_MAX) { x = WORLD_X_MAX - R; vx = -vx * restitution; }
    }

    // --- 8. УНІВЕРСАЛЬНА ФУНКЦІЯ МАЛЮВАННЯ ВЕКТОРА ---
    function drawVector(targetCtx, start, end, color, label, magnitude, unit) {
        targetCtx.strokeStyle = color;
        targetCtx.fillStyle = color;
        targetCtx.lineWidth = 3;

        targetCtx.beginPath();
        targetCtx.moveTo(start.x, start.y);
        targetCtx.lineTo(end.x, end.y);
        targetCtx.stroke();

        const angle = Math.atan2(end.y - start.y, end.x - start.x);
        const headLength = 8;
        targetCtx.beginPath();
        targetCtx.moveTo(end.x, end.y);
        targetCtx.lineTo(end.x - headLength * Math.cos(angle - Math.PI / 6), end.y - headLength * 
Math.sin(angle - Math.PI / 6));
        targetCtx.lineTo(end.x - headLength * Math.cos(angle + Math.PI / 6), end.y - headLength * 
Math.sin(angle + Math.PI / 6));
```

```
        targetCtx.lineTo(end.x, end.y);
        targetCtx.fill();

        const labelText = `${label}: ${magnitude.toFixed(1)} ${unit}`;

        const labelOffset = 25;
        let labelX = end.x + labelOffset * Math.cos(angle);
        let labelY = end.y + labelOffset * Math.sin(angle);

        if (Math.abs(angle) > Math.PI / 2) {
          labelX -= targetCtx.measureText(labelText).width;
        } else {
          labelY += 5;
        }

        targetCtx.font = 'bold 12px Arial';
        targetCtx.fillText(labelText, labelX, labelY);
      }

      // --- 9. МАЛЮВАННЯ ВЕКТОРІВ СИЛ (CANVAS 1) ---
      function drawForceVectors(targetCtx, canvasSize) {
        targetCtx.clearRect(0, 0, canvasSize, canvasSize);

        const ball_pos = {x: canvasSize / 2, y: canvasSize / 2};

        const F = lastForces;
        const FD_mag = Math.sqrt(F.FD_x * F.FD_x + F.FD_y * F.FD_y);
        const F_res_mag = Math.sqrt(F.F_res_x * F.F_res_x + F.F_res_y * F.F_res_y);
        const F_magnitudes = [F.Fg, F.FA, FD_mag, F_res_mag];
        const maxForce = Math.max(...F_magnitudes);

        const currentForceScale = maxForce > 1e-4 ? MAX_FORCE_VECTOR_PX / maxForce : 0;

        // --- ПОЧАТКОВІ ТОЧКИ ---
        const Fg_start = {x: ball_pos.x + VECTOR_OFFSET_PX, y: ball_pos.y};
        const FA_start = {x: ball_pos.x - VECTOR_OFFSET_PX, y: ball_pos.y};
        const FD_start = {x: ball_pos.x, y: ball_pos.y + VECTOR_OFFSET_PX}; // Вертикальний
зсув для FD

        // Fg (Синій) - Зі зміщенням
        drawVector(targetCtx, Fg_start, {x: Fg_start.x, y: Fg_start.y + F.Fg * currentForceScale},
'blue', 'Fg', F.Fg, 'H');
        // FA (Зелений) - Зі зміщенням
        drawVector(targetCtx, FA_start, {x: FA_start.x, y: FA_start.y - F.FA * currentForceScale},
'green', 'FA', F.FA, 'H');

        // FD (Orange) - З вертикальним зміщенням
        if (FD_mag > 0.1) {
           const FD_end_x = FD_start.x + F.FD_x * currentForceScale;
           const FD_end_y = FD_start.y - F.FD_y * currentForceScale; // Інверсія Y для Fd
           drawVector(targetCtx, FD_start, {x: FD_end_x, y: FD_end_y}, 'orange', 'FD', FD_mag,
'H');
```

```
        }

        // F_res (Червоний) - Від центру
        drawVector(targetCtx, ball_pos, {x: ball_pos.x + F.F_res_x * currentForceScale, y:
ball_pos.y - F.F_res_y * currentForceScale}, 'red', 'Fрез', F_res_mag, 'Н'); // Інверсія Y для Fрез

        // Малюємо кулю як червону точку
        targetCtx.fillStyle = '#C0392B';
        targetCtx.beginPath();
        targetCtx.arc(ball_pos.x, ball_pos.y, DOT_RADIUS_PX, 0, 2 * Math.PI);
        targetCtx.fill();
    }

    // --- 10. МАЛЮВАННЯ ВЕКТОРІВ ШВИДКОСТІ/ПРИСКОРЕННЯ (CANVAS 2) ---
    function drawKinematicVectors(targetCtx, canvasSize) {
        targetCtx.clearRect(0, 0, canvasSize, canvasSize);

        const ball_pos = {x: canvasSize / 2, y: canvasSize / 2};

        const F = lastForces;
        const V_mag = Math.sqrt(vx * vx + vy * vy);
        const A_mag = Math.sqrt(F.ax * F.ax + F.ay * F.ay);

        const kinematicMagnitudes = [V_mag, A_mag];
        let maxKinematicMagnitude = Math.max(...kinematicMagnitudes);

        const minScaleMagnitude = 0.5;
        if (maxKinematicMagnitude < minScaleMagnitude) {
            maxKinematicMagnitude = minScaleMagnitude;
        }

        const kinematicScale = MAX_KINEMATIC_VECTOR_PX / maxKinematicMagnitude;

        const V_end_x = ball_pos.x + vx * kinematicScale;
        const V_end_y = ball_pos.y - vy * kinematicScale;
        drawVector(targetCtx, ball_pos, {x: V_end_x, y: V_end_y}, '#00BCD4', 'V', V_mag, 'м/с');

        const A_end_x = ball_pos.x + F.ax * kinematicScale;
        const A_end_y = ball_pos.y - F.ay * kinematicScale;
        drawVector(targetCtx, ball_pos, {x: A_end_x, y: A_end_y}, '#9C27B0', 'A', A_mag, 'м/с²');

        targetCtx.fillStyle = '#C0392B';
        targetCtx.beginPath();
        targetCtx.arc(ball_pos.x, ball_pos.y, DOT_RADIUS_PX, 0, 2 * Math.PI);
        targetCtx.fill();
    }

    // --- 11. ОНОВЛЕННЯ ТЕКСТОВОЇ ПАНЕЛІ (НОВА ФУНКЦІЯ) ---
    function updateValueDisplay() {
        const F = lastForces;
        const V_mag = Math.sqrt(vx * vx + vy * vy);
        const A_mag = Math.sqrt(F.ax * F.ax + F.ay * F.ay);
```

```
        const FD_mag = Math.sqrt(F.FD_x * F.FD_x + F.FD_y * F.FD_y);
        const F_res_mag = Math.sqrt(F.F_res_x * F.F_res_x + F.F_res_y * F.F_res_y);

        let html = "<h4>Поточні значення змінних:</h4>";

        // Секція Кінематики
        html += `<div class="value-section"><b>Кінематика (V, A):</b>`;
        html += `<p style="color: #00BCD4; margin: 0;">Швидкість V: ${V_mag.toFixed(3)}
м/с</p>`;
        html += `<p style="margin: 0 0 5px 15px;">X-компонента Vₓ: ${vx.toFixed(3)} м/с</p>`;
        html += `<p style="margin: 0 0 5px 15px;">Y-компонента Vᵧ: ${vy.toFixed(3)} м/с</p>`;

        html += `<p style="color: #9C27B0; margin: 0;">Прискорення A: ${A_mag.toFixed(3)}
м/с²</p>`;
        html += `<p style="margin: 0 0 5px 15px;">X-компонента Aₓ: ${F.ax.toFixed(3)}
м/с²</p>`;
        html += `<p style="margin: 0 0 5px 15px;">Y-компонента Aᵧ: ${F.ay.toFixed(3)}
м/с²</p></div>`;


        // Секція Сил
        html += `<div class="value-section"><b>Сили (Ньютони):</b>`;
        html += `<p style="color: red; margin: 0;">Результуюча сила Fрез:
${F_res_mag.toFixed(3)} Н</p>`;
        html += `<p style="margin: 0 0 5px 15px;">X-компонента Fрезₓ: ${F.F_res_x.toFixed(3)}
Н</p>`;
        html += `<p style="margin: 0 0 5px 15px;">Y-компонента Fрезᵧ: ${F.F_res_y.toFixed(3)}
Н</p>`;

        html += `<p style="color: blue; margin: 0;">Сила тяжіння Fg: ${F.Fg.toFixed(3)} Н</p>`;
        html += `<p style="color: green; margin: 0;">Сила Архімеда FA: ${F.FA.toFixed(3)}
Н</p>`;
        html += `<p style="color: orange; margin: 0;">Сила опору FD: ${FD_mag.toFixed(3)}
Н</p></div>`;

        // Секція Середовища
        html += `<div class="value-section"><b>Середовище:</b>`;
        html += `<p style="margin: 0 0 5px 0;">Маса кулі (постійна): ${m.toFixed(3)} кг</p>`;
        html += `<p style="margin: 0 0 5px 0;">Густина середовища:
${F.rho_medium.toFixed(3)} кг/м³</p></div>`;


        valueDisplayPanel.innerHTML = html;
    }


    // --- 12. ЛОГІКА МАЛЮВАННЯ (ЗАГАЛЬНА) ---
    function draw() {
        ctx.clearRect(0, 0, MAIN_CANVAS_WIDTH, MAIN_CANVAS_HEIGHT);

        const boundary_canvas = worldToCanvas(0, Y_BOUNDARY_WORLD);
        ctx.fillStyle = 'rgba(0, 191, 255, 0.5)';
```

```
        ctx.fillRect(0, boundary_canvas.y, MAIN_CANVAS_WIDTH,
MAIN_CANVAS_HEIGHT - boundary_canvas.y);
        ctx.fillStyle = '#e0f7fa';
        ctx.fillRect(0, 0, MAIN_CANVAS_WIDTH, boundary_canvas.y);
        ctx.strokeStyle = '#333';
        ctx.lineWidth = 2;
        ctx.beginPath();
        ctx.moveTo(0, boundary_canvas.y);
        ctx.lineTo(MAIN_CANVAS_WIDTH, boundary_canvas.y);
        ctx.stroke();

        if (pathHistory.length > 1) {
          ctx.beginPath();
          ctx.strokeStyle = 'rgba(0, 0, 0, 0.5)';
          ctx.lineWidth = 2;
          let firstPoint = worldToCanvas(pathHistory[0].x, pathHistory[0].y);
          ctx.moveTo(firstPoint.x, firstPoint.y);
          for (let i = 1; i < pathHistory.length; i++) {
            let point = worldToCanvas(pathHistory[i].x, pathHistory[i].y);
            ctx.lineTo(point.x, point.y);
          }
          ctx.stroke();
        }

        const ball_pos = worldToCanvas(x, y);
        const radius_canvas = R * SCALE;
        ctx.fillStyle = '#C0392B';
        ctx.beginPath();
        ctx.arc(ball_pos.x, ball_pos.y, radius_canvas, 0, 2 * Math.PI);
        ctx.fill();

        update(true);
        drawForceVectors(forceCtx, VECTOR_CANVAS_SIZE);
        drawKinematicVectors(kinematicCtx, VECTOR_CANVAS_SIZE);

        updateValueDisplay();

        // 3. Виведення координат
        ctx.fillStyle = '#333';
        ctx.font = '14px Arial';
        ctx.fillText(`X: ${x.toFixed(2)} м, Y: ${y.toFixed(2)} м`, 10, 20);
        ctx.fillText(`Vx: ${vx.toFixed(2)} м/с, Vy: ${vy.toFixed(2)} м/с`, 10, 40);
        ctx.fillText(`Межа: Y = ${Y_BOUNDARY_WORLD.toFixed(2)} м`, 10, 60);
        ctx.fillText(`Середовище: ${y > Y_BOUNDARY_WORLD ? 'Повітря' : 'Рідина'}`, 10,
80);
      }

      // --- 13. ЦИКЛ АНІМАЦІЇ ---
      function loop() {
        if (!isPaused) {
          for (let i = 0; i < 5; i++) {
            update();
```

```
            }
        }

        draw();

        if (Math.abs(vx) > 0.05 || Math.abs(vy) > 0.05) {
            animationFrameId = requestAnimationFrame(loop);
        } else {
             console.log("Симуляція зупинена (швидкість мала).");
        }
    }

    function startSimulation() {
        initialize();
        animationFrameId = requestAnimationFrame(loop);
    }

    window.onload = startSimulation;
  </script>
</body>
</html>
```