Василь Янішевський, *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інноватики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка*

ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД В ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЯХ ЕКОНОФІЗИКИ

У статті представлені результати застосування варіаційного методу статистичної фізики до дослідження оптимізаційних задач, що вивчає еконофізика. Метод ілюструється на прикладі моделі minority game. Показано, що в запропонованому підході отримуються відомі результати отримані в наближенні симетричних реплік. Демонструється простота та зручність варіаційного методу для дослідження складних оптимізаційних задач з великою (макроскопічною) кількістю змінних.

Постановка проблеми та аналіз основних досліджень та публікацій. На сьогодні еконофізика – молода, але вже усталена наукова галузь з відомими досягненнями [1 – 5]. Еконофізика виникла в середовищі фізиків і є новим підхідом в економічній науці. Основними завданнями, що спонукали до зародження нової галузі досліджень, є опис стрибкоподібних та різких рухів глобальних і локальних ринків. За аналогією з фізикою був запропонований “мікроскопічний підхід” до вивчення процесів, що відбуваються в ринкових та інших економічних системах. Якщо традиційно для опису ринків брали за основу певні макроскопічні параметри, такі, як попит та пропозиція, то представники “мікроскопічного підходу” ввели поняття ансамблю агентів (трейдерів). Згідно з основними положеннями фізики динаміка цін зумовлена “мікроскопічними” взаємодіями між трейдерами. Тобто, еконофізики розглядають фінансові ринки як складні системи, що еволюціонують, коливання цін, зокрема, виникають у результаті тих або інших дій тисяч трейдерів, інвесторів та спекулянтів.

Еконофізика використовує сучасний математичний апарат нелінійної динаміки та статистичної фізики. Оскільки в економіці, на відміну від фізики, відсутні загальні принципи та підходи для побудови моделей динаміки ринків, то доводиться діяти “навмання”; таким чином з’явилися різні моделі, запропоновані фізиками. Досить продуктивною виявилась модель minority game, що була побудована для опису динаміки та рівноваги ринкових систем (зокрема фондових бірж) [3 – 8]. При цьому з’ясувалось, що при аналізі таких моделей ефективними є методи, розроблені фізиками-теоретиками в теорії статистичної фізики невпорядкованих систем. Застосуванню варіаційного методу до вивчення властивостей моделі minority game присвячена дана стаття.

Мета статті. Показати ефективність застосування варіаційного методу статистичної фізики до оптимізаційних задач, що вивчає еконофізика. Зокрема, нерівність для вільної енергії статистичної фізики [9] застосовується до задачі мінімізації в моделі minority game. Оскільки при аналізі моделей еконофізики виникають значні математичні труднощі, то застосування відомих наближених методів має як практичний, так і теоретичний інтерес.

Виклад основного матеріалу. 1. Вихідні положення моделі minority game. Як вже вказувалось, дана модель виникла з метою опису фондових та фінансових ринків. Її основи детально висвітлені в цитованих вище роботах, тому ми наведемо лише стисло її формулювання. Модель ґрунтується на положенні, що ринок – самоорганізована система, де кожен агент визначає свою поведінку згідно з власними поглядами на події. У найпростішому випадку ці події полягають у коливанні цін.

Отже, модель ринку складається з N агентів, які можуть бути в кожен момент часу t у двох станах “купівля” (buy) та “продаж” (sell) . У моделі це враховується наступним чином: кожен агент $i=1,\dots,N$ в момент часу t здійснює дію $a_i(t)=+1$ (buy) або $a_i(t)=-1$ (sell). Враховуючи дії всіх агентів, виграш i агента можна визначити так:

$$u_i(t)=-a_i(t)\cdot A(t)\text{, де } A(t)=\sum_{i=1}^{N}a_i(t). \quad (1)$$

Рівняння (1) моделює основну структуру ринкової взаємодії, де дохід кожного агента визначається дією всіх решти учасників ринку через величину $A(t)$, яка пропорційна ціні активу та визначається всім ринком. Тип взаємодії (1) відображає правило меншості (виграє той, хто в кінцевому підсумку перебуває в меншості: виграш становить $a_i(t) = -sign(A(t))$, втрати більшості рівні $-|A(t)|$). Загальний дохід всіх агентів $\sum_{i=1}^{N} u_i = -A^2$ є від'ємний. Отже, кількість агентів, що програли, більша від кількості тих, що виграли, і агенти не можуть знати, що буде робити більшість доти, доки не буде здійснено вибір. Усі агенти мають доступ до спільної інформації, що описується цілим числом m та набуває значень від 1 до P. Нехай в момент t інформація набуває значення $m(t)$. Коли агенти мають деяку інформацію про ринок, то різні значення $m(t)$ для них не рівнозначні, що визначається їх власним досвідом із визначення впливу інформації на дохід. Оскільки поведінка агентів впливає на ринок, то цю дію позначають через $A^{\mu(t)}(t)$. Далі необхідно врахувати як агенти вибирають свої дії на основі інформації $m(t)$. Якщо агенти вважають, що $m(t)$ містить певну інформацію про ринок, то вони дотримуються деякої стратегії передбачень, яка визначає, яку дію здійснювати. Загалом існує 2^P стратегій, але ми вважатимемо, що кожен агент вибирає із загальної кількості лише S. Дія агента i, якщо він дотримується стратегії s, враховуючи інформацію $m(t)$ є $a_{s,i}^{\mu}$ (надалі часову змінну t для спрощення запису опускатимемо, оскільки ми розглядатимемо рівноважний стан ринку). Тоді формулу (1) для доходу слід записати у вигляді:

$$u_i = -a_{s,i}^{\mu} \cdot A^{\mu}, \text{ де } A^{\mu} = \sum_{i=1}^{N} a_{s,i}^{\mu} \qquad (2)$$

Далі вважається, що число P є досить великим числом, того ж самого порядку, що N (інакше макроскопічним). Позначимо $\alpha = P/N$, величина, яка залишається скінченною при $N \to \infty$. Це співвідношення аналогічне до термодинамічної границі в статистичній фізиці [9, 10]. Як показано в [11], властивості моделі в границі великих значень N залежать лише від комбінації $\alpha = P/N$. Значення m описується певним розподілом ρ^{μ}, незалежно для кожного часового кроку.

Ще одне з важливих припущень, яке приймається – для кожного часового кроку дії агентів $a_{s,i}$ є випадковими та незалежними між собою. А саме ймовірності прийняття дій агентами в кожному стані рівні:

$$P(a_{s,i}^{\mu} = +1) = P(a_{s,i}^{\mu} = -1) = \frac{1}{2}, \qquad \forall i \in N,$$

$$s \in \{1,..., S\},\ \mu \in \{1...P\}. \qquad (2)$$

Аналогічно, як в теорії ігор [12, 13], для аналізу гри вводяться змішані стратегії. Позначимо їх $\pi_{s,i},\ s = 1,..,S$ для кожного агента, що позначають ймовірності з якими i-й агент застосовує дану стратегію. Має місце умова нормування $\sum_s \pi_{s,i} \cdot \pi_{s,i} = 1$. Фазовий простір моделі задається множиною змінних $\pi_{s,i}$, $\{\ s = 1,..,S,\ i = 1,..,N\ \}$. Точка в цьому просторі визначає стан системи. В результаті можна визначати середні величини в фазовому просторі, наприклад:

$$\left\langle A^{\mu} \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S} \pi_{s,i} \cdot a_{s,i}^{\mu}. \qquad (3)$$

Отже, побудована модель описує колективні процеси, що відбуваються в ринку. Тому важливо визначити основні величини, які визначають рівноважні характеристики ринку. Одна з важливих величин – дисперсія, що визначає флуктуації величини (3):

$$\sigma^2 \equiv \overline{\langle A \rangle^2} = \sum_{\mu=1}^{P} \rho^{\mu} \left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} a_{s,i}^{\mu} \right)^2 \right\rangle, \qquad (4)$$

де $\langle ... \rangle$ позначає усереднення за змішаними стратегіями гравців.

Величина σ^2, як зазначалось вище, визначає також загальний програш гравців ($-\sum_{i=1}^{N} u_i = \sigma^2$). Мале значення величини σ^2 свідчить про певну координацію у грі, тим самим в діях агентів на ринку.

Модель, що описується (4) є симетричною відносно $A^{\mu} = \sum_{i=1}^{N} a_{s,i}^{\mu}$, тобто величини протилежних знаків дають однаковий внесок. Для визначення асиметрії, тобто розділення позитивних та негативних внесків вводять величину.

$$H \equiv \overline{\langle A \rangle^2} = \sum_{\mu=1}^{P} \rho^{\mu} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{S} \pi_{s,i} \cdot a_{s,i}^{\mu} \right)^2 . \qquad (5)$$

Власне величина (5) є основною інформативною величиною, що моделює стан ринку в моделі minority game, вона володіє властивостями гамільтоніану системи [6]. Вважається, якщо $H > 0$, гра асиметрична (тобто для деякого μ маємо $A^{\mu} > 0$) . Це означає, що існує краща стратегія, яка може дати додатній прибуток. Використовуючи економічну термінологію можна сказати, що в системі можливий арбітраж і дана величина є мірою цього арбітражу. Як функція $\alpha = P / N$ система демонструє фазовий перехід з порушенням симетрії для певного α_c. Для $\alpha > \alpha_c$ симетрія між двома знаками $A(t)$ порушена.

2. Мінімізація в методі "статистичної суми". Основна мета полягає у вивченні мінімуму величини (5) (далі гамільтоніан) як функції параметрів моделі. Мінімізація гамільтоніану є досить нетривіальною задачею. Для її виконання використовуються методи розроблені фізиками-теоретиками в теорії невпорядкованих систем. Зокрема, мінімум H можна розглядати як значення гамільтоніану системи, що досягається при нулі "температури". Цей прийом часто використовується фізиками при дослідженні основного стану фізичної системи [9, 10], в якому енергія досягає мінімуму. З цією метою визначимо статистичну суму системи:

$$Z(\beta) = Sp_{\pi} \exp(-\beta \cdot H(\pi)), \qquad (6)$$

де β – обернена температура та Sp позначає суму за всіма можливими станами системи (інтеграл за змінними $\pi_{s,i}$, { $s = 1,..,S$, $i = 1,..,N$ } із врахуванням умови нормування $\sum_{s} \pi_{s,i} \cdot \pi_{s,i} = 1$), $H(\pi)$ – вказує на функціональну залежність від ймовірностей змішаних стратегій.

Таким чином, мінімум гамільтоніану можна визначити так:

$$\min_{\pi \in \Delta^N} H(\pi) = -\lim_{\beta \to \infty} \beta^{-1} \ln Z(\beta) . \qquad (7)$$

У (4) міститься залежність від всіх можливих реалізацій дій гравців $a_{s,i}^{\mu}$. Іншими словами, щоб отримати змістовні величини, потрібно усереднити (7) за всіма можливими діями гравців $a_{s,i}^{\mu}$. З цією метою використовується метод розвинутий в теорії невпорядкованих систем – метод реплік [14]. А саме, усереднення $\ln Z(\beta)$ за всіма $a_{s,i}^{\mu}$, яке ми позначимо $\langle ... \rangle_a$ за допомогою методу реплік запишемо наступним чином:

$$\langle \ln Z(\beta) \rangle_a = \lim_{n \to 0} \frac{1}{n} \ln \langle Z(\beta)^n \rangle_a . \qquad (8)$$

Суть методу реплік полягає в тому, що обчислення у (8) виконуються для цілих n. Для цілих значень n обчислення $\langle Z(\beta)^n \rangle_a$ приводить до n копій (реплік) тієї ж системи з тими ж самими реалізаціями $a_{s,i}^{\mu}$. Далі для кожної репліки вводиться своя множина динамічних змінних $\{\pi_{s,i}^{a}\}$, які ми позначатимемо індексом $a = 1,...,n$. Кожній репліці відповідає гамільтоніан, який позначимо $H^a(\pi_a)$. Множина динамічних змінних для всіх реплік є прямими добутком n фазових просторів. Для обчислення границі $n \to 0$ в (8) здійснюється аналітичне продовження для дійсних значень n. Зауважимо також, що співвідношення (7) є фактично тим "містком", що дозволяє застосовувати методи статистичної фізики до оптимізаційних задач.

3. Нерівність для вільної енергії статистичної фізики. Як відомо, основою статистичної фізики є концепція розподілу Гіббса [9, 10]. Згідно з цим принципом ймовірність певного стану системи в фазовому просторі станів задається розподілом:

$$w(k) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} , \qquad (9)$$

де символ k позначає певний стан системи; β – обернена температура; H – гамільтоніан системи, заданий на множині змінних, що визначають стан системи; $Z = Spe^{-\beta H}$ – статистична сума системи; операція $Sp(...)$ визначає суму за всіма можливими станами системи.

Макроскопічні параметри системи (термодинаміка) цілком визначається статистичною сумою або пов'язаною з нею вільною енергією системи:

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z \,. \tag{10}$$

Розрахунок статистичної суми і відповідно вільної енергій для реальних систем є складна багаточастинкова задача статистичної фізики. Точні розрахунки вдається провести лише для ряду простих модельних систем [9, 10]. Тому в статистичній фізиці розроблені наближені методи розрахунку, серед яких важливе місце належить варіаційному методу. Даний метод базується на відомій нерівності для вільної енергії [9]:

$$F \le F_0 + \left\langle H - H_0 \right\rangle_0 , \tag{11}$$

де H_0 – деякий пробний гамільтоніан; F_0 – вільна енергія системи, що відповідає цьому гамільтоніану; $\langle \ldots \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} Spe^{-\beta H_0}(\ldots)$ – позначає усереднення за пробним гамільтоніаном.

Вибір пробного гамільтоніану залежить від конкретної розв'язуваної задачі. Основна вимога – він не повинен бути тривіальним, проте достатньо простим, щоб можна було виконати необхідні обчислення в (11). Пробний гамільтоніан містить також ряд певних варіаційних параметрів, мінімізація за якими в (11) дозволяє зменшити відхилення від точного значення вільної енергії. Зауважимо також, що співвідношення типу (11) застосовувалось також і для задач не пов'язаних безпосередньо з фізикою. Так, у роботі [15] ідеї варіаційного методу застосовувались для аналізу експериментальних статистичних даних в інформаційних та комунікаційних системах.

4. Варіаційний метод в моделі minority game. Як показано в роботах [3, 4, 5] статсуму (8) із вказаними там наближеннями можна представити у вигляді:

$$Z = \left\langle Z(\beta)^n \right\rangle_a = \int DzD\pi \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{P} z_a^{\mu 2}\right)$$
$$\exp\left(-\frac{\beta}{P}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{P}\sum_{s=1}^{S}\left(\sum_{a=1}^{n} z_a^{\mu}\pi_{i,s}^{a}\right)^2\right) \tag{12}$$

де введені позначення: $Dz = \prod_{a=1}^{n}\prod_{\mu=1}^{P}\frac{dz_a^{\mu}}{\sqrt{2\pi}}$; $D\pi = \prod_{a=1}^{n}\prod_{\mu=1}^{P}\prod_{s=1}^{S} d\pi_{i,s}^{a}$. Нагадаємо, що інтегрування за змінними $\pi_{i,s}^{a}$ відбувається в межах (0; 1), а за змінними z_a^{μ} в нескінчених межах; також змінні $\pi_{i,s}^{a}$ не є незалежними, а пов'язані співвідношенням – $\sum_{s=1}^{S}\pi_{i,s}^{a} = 1$. З формули (12) видно, що інтеграли не факторизуються одночасно за реплічними змінними (позначені індексом a) та змінними "частинок" (позначені індексами i, μ, s). Оскільки кількість змінних частинок є макроскопічною, то інтегрування в (12) не може бути виконане в загальному випадку. З метою застосування варіаційного методу зручнішою буде дещо інша форма представлення статсуми. Для цього в (12) перейдемо до незалежних змінних частинок, врахувавши співвідношення $\sum_{s=1}^{S}\pi_{i,s}^{a} = 1$ за допомогою d – функції Дірака $\delta\left(\sum_{s=1}^{S}\pi_{i,s}^{a} - 1\right)$.

При цьому будемо враховувати, як і в [5], два стани, тобто приймемо $S = 2$. Маючи на увазі також, що $P = \alpha N$, після нескладних перетворень отримаємо для статсуми n-реплік представлення:

$$Z = \int Dz \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{a,\mu} z_a^{\mu 2}\right)\exp\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\sum_{\mu}\left(\sum_a z_a^{\mu}\right)^2\right)\cdot$$
$$\left(\int_{-1}^{1}\prod_a \frac{d\pi_a}{2}\exp\left(-\frac{\beta}{2\alpha N}\sum_{\mu}\left(\sum_a z_a^{\mu}\pi_a\right)^2\right)\right)^N , \tag{13}$$

де $Dz = \prod_{a,\mu}\frac{dz_a^{\mu}}{\sqrt{2\pi}}$. В формулі (13) вжито також спрощені позначення для сум та добутків, де відповідні індекси набувають тих же значень, що і в (12).

Представлення (13) є досить цікавим з точки зору фізичної інтерпретації. Зокрема, з останнього множника формули (13) видно, що взаємодія між змінними системи π_a відбувається через середнє поле, яке задається змінними z_a^{μ}. Виконавши в (13) інтегрування за змінними π_a можна отримати представлення статсуми лише через змінні середнього поля. Однак через те, що інтеграли за змінними π_a не факторизуються, зазначене інтегрування неможливо виконати в замкнутому вигляді. Можна представити, наприклад, останній множник у вигляді експонентного ряду, як це часто здійснюють у фізичних задачах [16].

З метою застосування варіаційного методу статсуму (13) запишемо у вигляді:

$$Z=\int \begin{matrix} Dz\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{a,\mu} z_a^{\mu 2}\right) \\ \exp\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\sum_{\mu}\left(\sum_a z_a^{\mu}\right)^2\right)\exp\left(-\beta V_{вз}\right) \end{matrix}, \quad (14)$$

де $V_{вз}=-\frac{N}{\beta}\ln\left(\int_{-1}^{1}\prod_a\frac{d\pi_a}{2}\exp\left(-\frac{\beta}{2\alpha N}\sum_{\mu}\left(\sum_a z_a^{\mu}\pi_a\right)^2\right)\right)$

має зміст взаємодії між змінними поля, про що вказувалось вище. Видно також, що ця складова гамільтоніану є неполіноміальною за змінними z_a^{μ}.

Як вказувалось в п.2 для наближеного аналізу можна задати деякий пробний гамільтоніан. Зокрема, в нашому випадку виберемо його на основі наступної заміни:

$$\left(\sum_a z_a^{\mu}\pi_a\right)^2=\sum_{a,b} z_a^{\mu}z_b^{\mu}\pi_a\pi_b\rightarrow\sum_{a,b} z_a^{\mu}z_b^{\mu}Q_{ab}. \quad (15)$$

Згідно з (15) взаємодія між полями в пробному гамільтоніані задається деякою матрицею Q_{ab}, елементи якої є варіаційними параметрами.

Для пробного гамільтоніану статсума суттєво спрощується:

$$Z_0=\int D\omega\exp\left(-\beta V_{0вз}\right), \quad (16)$$

де $V_{0вз}=\frac{1}{2\alpha}\sum_{\mu}\sum_{a,b} z_a^{\mu}z_b^{\mu}Q_{ab}$ – взаємодія, що є квадратичною за змінними поля. В (16) введено також позначення

$$D\omega=Dz\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{a,\mu} z_a^{\mu 2}\right)\exp\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\sum_{\mu}\left(\sum_a z_a^{\mu}\right)^2\right),$$

що має зміст міри інтегрування в просторі змінних z_a^{μ}.

Нерівність для вільної енергії запишеться наступним чином:

$$F\le F_0+\left\langle V_{вз}-V_{0вз}\right\rangle_0, \quad (17)$$

де усереднення в (17) проводиться за формулою: $\left\langle\ldots\right\rangle_0=\frac{1}{Z_0}\int D\omega\exp\left(-\beta V_{0вз}\right)(\ldots)$.

Розрахунки суттєво спрощуються, оскільки величини факторизуються за індексом μ:

$$Z_0=\prod_{\mu} Z_0^1=\left(Z_0^1\right)^{\alpha N}, \quad (18)$$

де

$$Z_0^1=\int\prod_a\frac{dz_a}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{a,b} z_a\breve{M}_{ab}z_b\right)=\frac{1}{\sqrt{\det\breve{M}}}. \quad (19)$$

Відповідна матриця визначається рівністю: $\breve{M}=\breve{I}+\frac{\beta}{\alpha}\breve{E}+\frac{\beta}{\alpha}\breve{Q}$. Тут $\breve{I}$ – одинична матриця n-го порядку; $\breve{E}$ – матриця n-го порядку всі елементи якої рівні 1; $\breve{Q}$ – матриця, що була визначена раніше. Для середніх в (17) отримаємо:

$$\left\langle V_{0вз}\right\rangle_0=\frac{N}{2}\sum_{a,b} Q_{ab}\left\langle z_a z_b\right\rangle_1=N\alpha\sum_{a,b} Q_{ab}\frac{\partial F_0^1}{\partial Q_{ab}}, \quad (20)$$

де

$$F_0^1=-\frac{1}{\beta}\ln Z_0^1;$$

$$\left\langle\ldots\right\rangle_1=\frac{1}{Z_0^1}\int\prod_a\frac{dz_a}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{a,b} z_a\breve{M}_{ab}z_b\right)(\ldots)$$

Дещо складніше визначити середнє $\left\langle V_{вз}\right\rangle_0$, оскільки $V_{вз}$ згідно з (14) не є поліноміальною величиною за змінними z_a. Однак, використовуючи ідею методу реплік як і в (8), неважко показати, що в границі $N\rightarrow\infty$ має місце рівність:

$$\left\langle\ln\left(\int_{-1}^{1}\prod_a\frac{d\pi_a}{2}\exp\left(-\frac{\beta}{2\alpha N}\sum_{\mu}\left(\sum_a z_a^{\mu}\pi_a\right)^2\right)\right)\right\rangle_0= \ln\left(\int_{-1}^{1}\prod_a\frac{d\pi_a}{2}\exp\left(-\frac{\beta}{2}\left\langle\left(\sum_a z_a\pi_a\right)^2\right\rangle_1\right)\right) \quad (21)$$

Підсумовуючи наведені вище викладки, отримаємо для вільної енергії вираз:

$$F=\frac{N\alpha}{2\beta}\ln\det\breve{M}-\frac{N}{\beta}\ln\left(\int_{-1}^{1}\prod_a\frac{d\pi_a}{2}\exp\left(-\frac{\beta}{2}\sum_{a,b}\pi_a\pi_b\breve{M}_{ab}^{-1}\right)\right) -\frac{N}{2}\sum_{a,b} Q_{ab}\breve{M}_{ab}^{-1}. \quad (22)$$

Тут враховано також, що $\dfrac{\partial F_0^1}{\partial Q_{ab}} = \dfrac{1}{2\alpha}\breve{M}_{ab}^{-1}$, де $\breve{M}^{-1}$ – матриця обернена до $\breve{M}$. Формула (22) визначає вільну енергію системи n-реплік у варіаційному методі. Вільна енергія містить варіаційні параметри – елементи матриці Q_{ab}, які визначаються з умови мінімуму: $\dfrac{\partial F}{\partial Q_{ab}} = 0$. Після обчислення похідних отримаємо систему рівнянь для визначення Q_{ab}:

$$Q_{ab} = \left\langle \pi_a \pi_b \right\rangle_\pi , \tag{23}$$

де введено позначення

$$\left\langle \pi_a \pi_b \right\rangle_\pi = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1}\prod_a \frac{d\pi_a}{2}\exp\left(-\frac{\beta}{2}\sum_{a,b}\pi_a\pi_b\breve{M}_{ab}^{-1}\right)(\ldots)}{\displaystyle\int_{-1}^{1}\prod_a \frac{d\pi_a}{2}\exp\left(-\frac{\beta}{2}\sum_{a,b}\pi_a\pi_b\breve{M}_{ab}^{-1}\right)} .$$

Таким чином, система рівнянь (23) та вираз для вільної енергії дає розв'язок поставленої задачі. Однак для отримання практичних результатів необхідно перейти до границі $n \to 0$ згідно (8), що здійснити в загальному випадку проблематично. Тому, в дусі симетричних реплік задамо матрицю Q_{ab} у вигляді: $Q_{ab} = (Q-q)\delta_{ab} + q$. Тобто, замість n^2 варіаційних параметрів задача містить лише два параметри, що відповідають діагональним та недіальнальним елементам матриці Q_{ab}. Підставляючи у вищенаведені формули, після нескладних обчислень, які ми опускаємо, отримаємо в границі $n \to 0$ для шуканого мінімуму (7) вираз:

$$H = -\lim_{n\to 0}\frac{1}{Nn\beta}\ln\left\langle Z(\beta)^n\right\rangle_a = \frac{1}{2\lambda} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{(1+q)(Q-q)}{2\lambda^2} + \Delta H, \tag{23}$$

де

$$\Delta H = -\frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right)$$
$$\ln\left(\int_{-1}^{1}\frac{d\pi}{2}\exp\left(-\frac{\beta}{2\lambda}\left(\pi^2 - 2\sqrt{\frac{1+q}{\alpha}}\pi\cdot\rho\right)\right)\right),$$

$$\lambda = 1 + \frac{\beta}{\alpha}(Q-q) .$$

Рівняння для визначення параметрів Q, q мають вигляд :

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right)\left\langle \pi^2\right\rangle_\pi ,$$

$$q = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right)\left(\left\langle \pi\right\rangle_\pi\right)^2 , \tag{24}$$

де позначено:

$$\left\langle \ldots\right\rangle_\pi = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{d\pi}{2}\exp\left(-\frac{\beta}{2\lambda}\left(\pi^2 - 2\sqrt{\frac{1+q}{\alpha}}\pi\cdot\rho\right)\right)(\ldots)}{\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{d\pi}{2}\exp\left(-\frac{\beta}{2\lambda}\left(\pi^2 - 2\sqrt{\frac{1+q}{\alpha}}\pi\cdot\rho\right)\right)} .$$

Аналіз системи рівнянь (24) та величини (23) в границі $\beta \to \infty$ підтверджує результати робіт [3 – 5] отримані іншим шляхом. Нагадаємо: їх суть полягає в тому, що значення H критично залежить від параметра α. Зокрема $H > 0$ при $\alpha > \alpha_C$ та $H = 0$ при $\alpha < \alpha_C$ ($\alpha_c \approx 0.33740$). З економічної точки зору така поведінка характеризує певну структурну перебудову ринку, оскільки H пов'язана з сумарними доходами агентів на ринку.

Висновки. У даній роботі застосовано варіаційний метод статистичної фізики до вивчення задачі оптимізації в моделі minority game. Встановлено вигляд пробного гамільтоніану, який приводить до результатів моделі minority game, що були отримані іншим способом в наближенні симетричних реплік. Розвиток варіаційних методів в оптимізаційних задачах, окреслених в роботі, на нашу думку, є досить перспективним для дослідження багатьох оптимізаційних задач. Зважаючи на певну гнучкість варіаційного методу, є сподівання, що на цьому шляху вдасться отримати ряд нових результатів.

1. Mantegna R.N., Stanley H.E. An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance. Cambrige University Press, 1999.– 180 p.

2. D. Challet, Y. C. Zhang, Emergence of Cooperation and Organization in an Evolutionary Game, Physica A 246, 407 (1997)

3. D. Challet, Y. C. Zhang, On the Minority Game: Analytical and Numerical Studies, Physica

A 256, 514 (1998)

4. Challet D., Marsili M. and Zecchina R. Statistical mechanics of systems with heterogeneous agents: Minority Games. Phys. Rev. Lett., vol.84, p. 1824 – 1827, 2000 (cond – mat/9904392).

5. Василь Янішевський. Еконофізика – перспективний напрямок досліджень. Аналіз ринку в рамках моделі “minority game”. Молодь і ринок, №1 – 2 (24 – 25), С. 64 – 73, 2007.

6. Challet D., Marsili M. and Zecchina R. Exact solution of a modified El Farol’s bar problem: Efficiency and the role of market impact. Physica A vol. 280, p. 52 – 533, 2000, vol.256 (cond-mat/9901243).

7. De Martino A and Marsili M. Replica symmetry breaking in the minority game. J/ Phys. A: Math. Gen., vol. 34 p. 2525 – 2537, 2001.(Preprint cond – mat/0007397).

8. Challet D., Chessa A, Marsili M. and Zhang Y – C. From minority game to real markets. Quantitative Finance, vol.1, p. 168 – 176, 2001.(Preprint cond – mat/0011042).

9. Р. Фейнман Статистическая механика. – Москва: Изд. “Мир”, 1975, С. 406.

10. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. – М.: Наука, 1982. – 608 с.

11. Savit R., Manuca R., and Riolo R., Adaptive competition, marcet efficiency and phase transition, Phys. Rev. Lett., 82, 2203, 1999.

12. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие. / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1999.

13. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1972. – 271 с.

14. M. Mezard, G. Parisi, M. A. Virasoro, Spin glass theory and beyong (World Scientific, 1987).

15. Dorthe Malzahn and Manfred Opper. Statistical Mechanics of Learning: A Variational Approach for Real Data. (cond-mat/0209164) v1 6 Sep 2002.

16. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

Лілія Морська, *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри іноземних мов Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка*

ІНФОРМАЦІЙНА КОМПЕТЕНЦІЯ ВЧИТЕЛЯ ЯК ПЕДАГОГІЧНА ПРОБЛЕМА

У статті здійснено аналіз поняття інформаційної компетенції майбутнього вчителя як одного із основних компонентів його ефективної сучасної професійної підготовки, визначено основні ознаки належного рівня інформаційної компетенції майбутнього вчителя.

Постановка проблеми. Особливості сучасного етапу освітніх перетворень в Україні визначаються загальносвітовими тенденціями, які можна сформулювати так:

- швидкий розвиток сучасних комп’ютерних засобів та розширення сфери їхнього застосування в галузі освіти;
- забезпечення освітніх закладів технічними засобами, що забезпечують реалізацію інформаційних процесів збереження, передавання та обробки цифрової інформації;
- використання ресурсів глобальної інформаційної мережі Інтернет у навчальному процесі.

Пов’язані із вказаними тенденціями зміни в системі освіти зумовили процес входження України у світовий освітній простір, а поступово удосконалювана матеріально-технічна база заклала основи для інформатизації освіти, яка створює зовнішні умови для підвищення ефективності навчання.

Інформатизація освіти проявляється через комплекс заходів, які ведуть до перетворення педагогічних процесів на основі впровадження у навчання інформаційної продукції. Використання в освітньому процесі сучасних технічних засобів (персональних комп’ютерів та інших приладів, що перетворюють інформацію з одного виду в інший) та нових інформаційних технологій зумовлює переосмислення суті та змісту дидактичного процесу, становлення нових принципів навчання. Відповідно, на даний час у загальноосвітній школі існує суттєва педагогічна проблема: не розроблена система, яка б забезпечувала ефективне використання сучасних інформаційних технологій у навчанні. Така проблема стосується не лише навчального процесу з боку учнів, й безпосередньо пов’язана з рівнем кваліфікації вчителя. Тому на часі є розв’язання завдання якісної підготовки майбутніх учителів до використання інформаційних технологій у професійній діяльності, тобто